УДК 530.145

Ю. А. Куперин, Ю. Б. Мельников

Квантовое рассеяние в калибровочных полях адиабатических представлений

В работе развит геометрический подход к методу адиабатических представлений для некоторого класса нерелятивистских гамильтонианов. На этой основе исследованы соответствующие динамические уравнения с эффективными неабелевыми взаимодействиями, имеющими смысл калибровочных полей, индуцированных размерной редукцией исходной задачи в специальном представлении. Доказана применимость предложенного подхода к исследованию процессов $2 \to (2, 3)$ квантового рассеяния в системе трех тел и получена двухсторонняя связь полной и эффективной S-матриц. Изучены асимптотики решений эффективного динамического уравнения и калибровочных полей адиабатических представлений. Предлагаемый подход проиллюстрирован на примерах систем, допускающих адиабатические представления с одномерной базой; в ряде случаев доказан гильберто-шмидтовский характер оператора поля.

Введение

Адиабатические представления для нерелятивистских гамильтонианов, являясь одним из мощных инструментов теоретического, а в последнее время и численного, анализа, широко использовались для исследования свойств атомных и ядерных систем, характеристик фазовых переходов, динамики акустических и электромагнитных полей и т. п. [1]—[23].

В традиционном подходе эффективность перехода в адиабатическое представление связывалась, обычно, с возможностью разбиения изучаемой системы на «медленную» и «быструю» подсистемы, выделением ассоциированных с таким разбиением малых параметров и последующим применением теории возмущений по этим параметрам [1]—[5].

На этом пути трудности исходной задачи, такие, например, как многомерность или многочастичность, преодолевались как с помощью хорошо развитой теории возмущений, так и формальным снижением размерности конфигурационного пространства системы — размерной редукцией.

В последнее время, однако, были обнаружены глубокие связи адиабатических представлений с геометрическими структурами, определяемыми процессами, происходящими в системе [6]—[23].

В такой интерпретации топологические инварианты, характеризующие систему (фаза Берри, классы Черна и т. п.), а также связности, удлиняющие производные в эффективных гамильтонианах, не ассоциированы непосредственно с выделением «быстрых» подсистем, а определяются геометрией, порожденной спектральной структурой изучаемых операторов. Именно, конфигурационное пространство наделяется структурой многообразия, которое совместно с пространством состояний рассматривается как расслоенное пространство, порожденное выделением тех или иных степеней свободы системы. Геометрия этого расслоения определяется как кинематикой системы, определяющей свойства базового многообразия, так и ее динамикой, характеризующей слои и структуру расслоения в целом. При этом связность на ассоциированном расслоении несет полную информацию о взаимодействии в системе.

Геометризация взаимодействий в адиабатическом подходе позволила применить мощные и хорошо разработанные методы геометрии, алгебры и топологии для изучения свойств решений динамических уравнений в применении к широкому классу квантовомеханических систем и вызвала новую волну активности в этом направлении. Однако исследования в этой области были в основном сосредоточены на рассмотрении дискретных спектров изучаемых гамильтонианов, компактных баз соответствующих расслоений и конечномерных связностей на них. Обобщение геометрического подхода на гамильтонианы с непрерывным спектром и построение теории рассеяния для систем нескольких частиц в адиабатических представлениях с неабелевыми бесконечномерными связностями до последнего времени отсутствовало. Для решения этой задачи потребовалось не только развитие алгебро-геометрической части описанного выше подхода, но и детальное изучение соответствующих аналитических и спектральных аспектов. При этом оказалось, что проблема восстановления геометрии в целом сводится в конечном счете к построению асимптотик решений уравнения Шрёдингера. Асимптотическая информация о таких решениях служит инструментом исследования геометрии расслоенного пространства и при заданной калибровочной группе позволяет построить правильные эффективные динамические уравнения и изучить их свойства.

В настоящей работе развит геометрический подход к методу адиабатических представлений для некоторого класса нерелятивистских гамильтонианов и на этой основе исследованы соответствующие динамические уравнения с операторными неабелевыми взаимодействиями, имеющими смысл обобщенных калибровочных полей, индуцированных размерной редукцией в этих представлениях. В рамках предложенного подхода сформулированы граничные задачи для эффективных уравнений, отвечающие процессам рассеяния $2 \to (2.3)$ в системе трех тел, проведен асимптотический анализ неабелевых операторных связностей (калибровочных полей) на некомпактных многообразиях и получены соотношения, реализующие двустороннюю связь между S-матрицами исходной и эффективной задач.

Мы признательны нашим коллегам из отдела математической и вычислительной физики Ленинградского университета Л. Д. Фаддееву, Б. С. Павлову, С. П. Меркурьеву, К. А. Макарову, П. Б. Курасову, Л. А. Дмитриевой, а также сотрудникам лаборатории теоретической физики объединенного института ядерных исследований Б. Л. Марков-

скому и С. И. Виницкому, в плодотворных дискуссиях с которыми была выполнена настоящая работа.

I. Квантовые системы в адиабатическом представлении

§ 1. Адиабатические представления для нерелятивистских гамильтонианов

Метод адиабатических представлений эффективен для исследования квантовомеханических систем, динамика которых задается оператором Гамильтона специальной структуры. Именно, пусть $\mathscr{M}$ — гладкое многообразие размерности n. Сопоставим каждой точке $\xi \in \mathscr{M}$ гильбертово пространство $\mathscr{F}_\xi$, которое будем называть гильбертовым слоем, и рассмотрим множество $\hat{\mathfrak{H}}$ функций на $\mathscr{M}$ таких, что в каждой точке $\xi \in \mathscr{M}$ значение функции $f(\xi) \in \mathscr{F}_\xi$:

$$\hat{\mathfrak{H}} = \{f\colon \xi \mapsto f(\xi) \in \mathscr{F}_\xi\}. \tag{1.1}$$

Множество $\hat{\mathfrak{H}}$, очевидно, обладает структурой линейного пространства и нормируемо, например, следующим образом:

$$\|f\|_{\hat{\mathfrak{H}}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi \in \mathscr{M}} \|f(\xi)\|_{\mathscr{F}_\xi}. \tag{1.2}$$

Существенный супремум понимается в смысле некоторой положительной меры на $\mathscr{M}$. Для такого пространства $\hat{\mathfrak{H}}$ будем использовать обозначение в виде прямого интеграла по многообразию $\mathscr{M}$:

$$\hat{\mathfrak{H}} = \int_{\mathscr{M}} \oplus \mathscr{F}_\xi \, d\xi. \tag{1.3}$$

Введенное определение отличается от стандартного [24], где под прямым интегралом вида (1.3) понимается гильбертово пространство с нормой $\|f\| = \left(\int \|f(\xi)\|^2_{\mathscr{F}_\xi} d\mu(\xi)\right)^{1/2}$. Однако для практических целей (исследования сходимости адиабатических разложений) удобно использовать «не гильбертово» определение (1.2). Задача рассеяния, тем не менее, будет рассматриваться в соответствующем гильбертовом пространстве.

Будем говорить, что линейный оператор $L\colon f \mapsto Lf$, действующий в пространстве $\hat{\mathfrak{H}}$, разложим в прямой интеграл, если для всех $f \in \hat{\mathfrak{H}}$, лежащих в области определения оператора L, и для всех $\xi \in \mathscr{M}$ выполнено условие строгой локальности:

$$Lf\colon \mathscr{M} \ni \xi \mapsto (Lf)(\xi) \in \mathscr{F}_\xi, \quad (Lf)(\xi) = L(\xi) f(\xi). \tag{1.4}$$

Операторы $L(\xi)$, действующие в гильбертовых слоях $\mathscr{F}_\xi$, будем называть слоями оператора L и использовать обозначение

$$L = \int_{\mathscr{M}} \oplus L(\xi) \, d\xi. \tag{1.5}$$

Предположим, что гамильтониан квантовомеханической системы, действующий в пространстве $\hat{\mathfrak{H}}$, имеет специальную структуру:

$$H = h \otimes I + L. \tag{1.6}$$

Здесь оператор $h \otimes I$ действует как h по переменной ξ и как единичный оператор по дополнительным переменным, а оператор L разложим в прямой интеграл (1.5). Операторы $L(\xi)$ предполагаем самосопряженными для всех $\xi \in \mathscr{M}$.

В рассмотренных ниже случаях описанная конструкция может быть связана с расслоением соответствующего конфигурационного пространства. Именно, пусть $\hat{\mathfrak{H}}$ — пространство функций на многообразии $M = \bigcup\limits_{\xi} (U_\xi \times \mathscr{N}_\xi)$ квадратично-суммируемых по мере $d\mu_\xi$ по почти всем (по мере $dm(\xi)$) многообразиям $\mathscr{N}_\xi$. Тогда говорят, что задано локально-тривиальное расслоение [25] многообразия M, π: $M \to \mathscr{M}$, с базой расслоения $\mathscr{M} = \bigcup\limits_{\xi} U_\xi$ и слоями $\mathscr{N}_\xi$. Выбирая в качестве гильбертовых слоев пространства $\mathscr{F}_\xi = L_2(\mathscr{N}_\xi, \ d\mu_\xi)$, придем к описанной выше структуре (1.3) пространства $\hat{\mathfrak{H}}$.

Самосопряженность операторов $L(\xi)$ при всех $\xi \in \mathscr{M}$ гарантирует полноту и ортогональность систем $\{\varphi_a(\xi)\}$ из собственных функций в гильбертовых слоях $\mathscr{F}_\xi$. Индекс a параметризует спектр $L(\xi)$: $a = n$ при $\varepsilon_n(\xi) \in \sigma_d(L(\xi))$, $a = q$ при $\varepsilon_q(\xi) \in \sigma_c(L(\xi))$. Собственные функции $\varphi_a(\xi)$ операторов $L(\xi)$,

$$L(\xi)\,\varphi_n(\xi) = \varepsilon_n(\xi)\,\varphi_n(\xi), \quad L(\xi)\,\varphi_q(\xi) = \varepsilon_q(\xi)\,\varphi_q(\xi), \tag{1.7}$$

будем считать нормированными:

$$\langle \varphi_n(\xi), \ \varphi_m(\xi)\rangle = \delta_{nm}, \ \langle \varphi_q(\xi), \ \varphi_{q'}(\xi)\rangle = \delta(q - q'). \tag{1.8}$$

Здесь q — параметр, меняющийся на униформизованной спектральной плоскости U_ξ абсолютно-непрерывной части оператора $L(\xi)$, так что функция $\varepsilon(\xi)$: $q \mapsto \varepsilon_p(\xi)$ задает накрытие $\mathrm{U}_\xi \to \mathbf{C}$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в слое $\mathscr{F}_\xi$.

Операторы $L(\xi)$ будем называть реперными операторами, поскольку функции $\{\varphi_a\}$ образуют ортонормированный подвижный базис (репер), параметрически зависящий от точки базы $\xi \in \mathscr{M}$. В силу полноты $\{\varphi_a\}$ и определения (1.1) всякую функцию $\Psi \in \hat{\mathfrak{H}}$ можно разложить по реперу $\{\varphi_a\}$. Обозначая через $\sum\limits_a\!\!\!\!\int$ суммирование по дискретному и интегрирование по непрерывному спектрам операторов $L(\xi)$, запишем это разложение в виде

$$\Psi = \sum_a\!\!\!\!\!\!\int \overline{\chi_a(\xi)}\,\varphi_a(\xi), \tag{1.9}$$

где $\chi_a(\xi) \in \mathbf{C}$ — коэффициенты разложения:

$$\chi_a(\xi) = \langle \varphi_a, \Psi\rangle. \tag{1.10}$$

Представление (1.9) будем называть адиабатическим представлением функции Ψ.

Всюду ниже будем предполагать, что $\mathscr{M}$ — гладкое многообразие без края, а оператор h имеет вид

$$h = -\Delta_\xi + V(\xi). \tag{1.11}$$

Сразу отметим, что мы здесь не рассматриваем вопросы измеримости функций в используемых расслоенных пространствах и прямых интегралах гильбертовых пространств и не обсуждаем точный смысл дифференциальных операторов на многообразиях. Для широкого класса многообразий эти вопросы решаются стандартным образом [41]. Для рассматриваемых ниже задач такие проблемы не возникают, поскольку соответствующие многообразия обладают евклидовой структурой.

Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$H\Psi = E\Psi \tag{1.12}$$

и подставим разложение (1.9) в (1.12). Проецируя на φ_b в пространстве $\mathcal{F}_\xi$, с учетом (1.6), (1.8), (1.11) получим уравнение на коэффициенты χ_a (ξ):

$$\sum_a \int [-L(\xi)\,\bar{\chi}_a\delta_{ab} + 2\langle\nabla_\xi\varphi_a, \varphi_b\rangle\nabla_\xi\bar{\chi}_a + \langle\Delta_\xi\varphi_a, \varphi_b\rangle\bar{\chi}_a - (V(\xi) - E)\,\bar{\chi}_a\delta_{ab}] = 0. \tag{1.13}$$

Определим оператор A (ξ), задав его «матричные элементы»

$$A_{ab}(\xi) \equiv \langle\varphi_a, \ \nabla_\xi\varphi_b\rangle. \tag{1.14}$$

Если a, b нумеруют дискретный спектр оператора L (ξ), то соответствующий блок оператора A (ξ) является матрицей, зависящей от параметра ξ. При a, b, пробегающих непрерывный спектр оператора L (ξ), блок оператора A (ξ) есть интегральный оператор с ядром A_{ab} (ξ). Последнее, вообще говоря, является обобщенной функцией, поскольку собственные функции непрерывного спектра φ_q (ξ) не лежат в пространстве $\mathcal{F}_\xi$.

Нам потребуется следующее утверждение [10].

Лемма 1. *Если $\mathcal{M}$ — гладкое многообразие без края и $\varphi_a \in C^2(\mathcal{M})$, то оператор A (ξ) удовлетворяет равенству*

$$\langle\varphi_a, \Delta_\xi\varphi_b\rangle = (\nabla_\xi A + A^2)_{ab}. \tag{1.15}$$

Доказательство. Прямым вычислением получаем:

$$\nabla_\xi A_{ab}(\xi) = \nabla_\xi\langle\varphi_a, \nabla_\xi\varphi_b\rangle = \langle\varphi_a, \Delta_\xi\varphi_b\rangle + \langle\nabla_\xi\varphi_a, \nabla_\xi\varphi_b\rangle.$$

С другой стороны, в силу полноты базиса $\{\varphi_a\}$

$$(A^2)_{ab} = \sum_s \int \langle\varphi_a, \nabla_\xi\varphi_s\rangle\langle\varphi_s, \nabla_\xi\varphi_b\rangle = \sum_s \int [\nabla_\xi\langle\varphi_a, \varphi_b\rangle -$$
$$- \langle\nabla_\xi\varphi_a, \varphi_s\rangle]\langle\varphi_s, \nabla_\xi\varphi_b\rangle = -\sum_s \int \langle\nabla_\xi\varphi_a, \varphi_s\rangle\langle\varphi_s, \nabla_\xi\varphi_b\rangle = -\langle\nabla_\xi\varphi_a, \nabla_\xi\varphi_b\rangle.$$

Складывая два полученных равенства, убеждаемся в справедливости (1.15).

Эта лемма вместе с соотношениями (1.7) позволяет переписать (1.13) в виде эффективного уравнения для набора коэффициентов адиабатического представления $\chi(\xi) = \{\chi_a(\xi)\}$:

$$[-(\nabla_\xi \otimes I + A(\xi))^2 + V(\xi) \otimes I + \Lambda(\xi)]\,\chi = E\chi. \tag{1.16}$$

Диагональный оператор $\Lambda(\xi) = \mathrm{diag}\,\{\varepsilon_a(\xi)\}$ содержит на главной диагонали термы ε_n (ξ) в «дискретной» части, а его «непрерывная» часть (отвечающая состояниям рассеяния реперного оператора) есть интегральный оператор с ядром $\varepsilon_q(\xi)\,\delta(q - q')$.

Эффективное уравнение (1.16) является основным объектом исследования настоящей работы. Определим класс функций, в котором ищутся его решения. Введем следующие обозначения. Пусть $N(\xi) = \dim P^d(\xi)\,\mathcal{F}_\xi$ — размерность подпространства, отвечающего дискретному спектру оператора $L(\xi)$. Через $\mathcal{H}(\xi)$ обозначим гильбертово пространство такое, что

$$\mathcal{H}(\xi)=\begin{cases} \mathbf{C}^{N(\xi)}\oplus L_2(\mathbf{U}_\xi), & \text{если} \quad N(\xi)<\infty, \\ l_2\oplus L_2(\mathbf{U}_\xi), & \text{если} \quad N(\xi)=\infty, \end{cases} \tag{1.17}$$

с нормой

$$\|\eta\|_{\mathcal{H}(\xi)}=\Big(\sum_{n=1}^{N(\xi)}|\eta_n|^2+\int_{\mathbf{U}_\xi}|\eta_q|^2\,dq\Big)^{1/2}. \tag{1.18}$$

Прямой интеграл таких пространств, понимаемый как

$$\hat{\mathcal{H}}=\{F\colon \mathcal{M}\ni\xi\mapsto F(\xi)\in\mathcal{H}(\xi)\},$$

обозначим через

$$\hat{\mathcal{H}}=\int_{\mathcal{M}}\oplus\,\mathcal{H}(\xi)\,d\xi. \tag{1.19}$$

Символом $\mathfrak{H}$ обозначим пространство квадратично-суммируемых на $\mathcal{M}$ по мере $dm(\xi)$ функций, принимающих значения в $\mathcal{F}_\xi$: $\mathfrak{H}=L_2(\mathcal{M},\mathcal{F}_\xi,dm)$. Для набора коэффициентов $\chi(\xi)=\{\chi_a(\xi)\}$ адиабатического представления (1.9) справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 2. 1) *Если* $\Psi\in\hat{\mathfrak{H}}$, *то* $\chi(\xi)\in\hat{\mathcal{H}}$ *и для всех* $\xi\in\mathcal{M}$ *имеет место равенство норм*:

$$\|\Psi\|_{\mathcal{F}_\xi}=\|\chi\|_{\mathcal{H}(\xi)}.$$

2) *Если* $\Psi\in\mathfrak{H}$, *то* $\chi(\xi)\in L_2(\mathcal{M},\mathcal{H}(\xi),dm)$ *и имеет место равенство норм*:

$$\|\Psi\|_{\mathfrak{H}}=\|\chi\|_{L_2(\mathcal{M},\mathcal{H}(\xi),dm)}.$$

Доказательство получается непосредственным вычислением с использованием соотношения ортогональности (1.8).

Основным объектом, входящим в эффективное уравнение (1.16), является оператор A. Он определяет связь между уравнениями на компоненты χ_a (по этой причине этот объект в физике именуется оператором неадиабатичности). Оператор $A(\xi)$ является очевидно антиэрмитовым:

$$A_{ab}(\xi)=-\overline{A_{ba}(\xi)}. \tag{1.20}$$

Если реперные функции φ_a могут быть выбраны вещественными, то для таких индексов a из (1.20) очевидно следует

$$A_{aa}(\xi)\equiv 0. \tag{1.21}$$

Геометрический смысл оператора A можно выяснить пользуясь обобщением понятия (аффинной) дифференциально-геометрической связности. Последняя определяется [26] как линейная операция «ковариантного» дифференцирования «вектор-функций» $\eta\in\hat{\mathcal{H}}$ в некоторой области $\Omega\subset\subset\mathcal{M}$ с координатами $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ и задается формулой

$$(D_\mu\eta)_a=\partial_\mu\eta_a+\sum_b\!\!\!\!\!\!\int A^\mu_{ab}\eta_b,\quad \mu=1,2,\ldots,n, \tag{1.22}$$

где $\eta=\{\eta_a\}$ — некоторый базис в слое $\mathcal{F}_\xi$, $\partial_\mu\equiv\partial/\partial\xi_\mu$. Воспользуемся следующим определением, обобщающим стандартное [26] на случай бесконечномерного пространства $\mathcal{F}$.

Определение 1. Калибровочным полем или аффинной связностью называется набор операторных функций $A^{\mu}(\xi)$ со значением в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$, который при изменении базиса $\eta = \{\eta_a\}$ в этом пространстве преобразуется по формуле

$$\eta = U\eta', \quad \eta_a = \sum_b \int U_{ab}\eta'_b, \qquad A'^{\mu} = U^{-1}A^{\mu}U + U^{-1}\partial_{\mu}U. \tag{1.23}$$

Убедимся, что построенный выше оператор $A(\xi)$, рассматриваемый как операторнозначное векторное поле $A(\xi) = \{A^{\mu}(\xi)\}$, $A^{\mu}_{ab} \equiv \langle\varphi_a, \partial_{\mu}\varphi_b\rangle$, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, на базовом многообразии $\mathcal{M}$, удовлетворяет данному определению.

Лемма 3. *Оператор $A(\xi)$ преобразуется при изменении базиса в пространстве $\mathcal{F}_{\xi}$ согласно формуле* (1.23) *преобразования аффинной связности.*

Доказательство. Пусть $\varphi = \{\varphi_a\}$, $\varphi' = \{\varphi'_a\}$ — два различных ортонормированных базиса в пространстве $\mathcal{F}$, связанные унитарным преобразованием $\varphi = U\varphi'$.

Согласно определению оператора A

$$A^{\mu}_{ab} = \langle\varphi_a, \partial_{\mu}\varphi_b\rangle = \sum_s \int \sum_t \int \langle U_{as}\varphi'_s, \partial_{\mu}U_{bt}\varphi'_t\rangle = \sum_s \int \sum_t \int U_{as}\partial_{\mu}\overline{U_{bt}}\,\langle\varphi'_s, \varphi'_t\rangle +$$
$$+ \sum_s \int \sum_t \int U_{as}\overline{U}_{bt}\,\langle\varphi'_s, \partial_{\mu}\varphi'_t\rangle = \sum_s \int U_{as}\partial_{\mu}\overline{U_{bs}} + \sum_s \int \sum_t \int U_{as}U_{bt}A'^{\mu}_{st}.$$

В силу унитарности оператора U имеем

$$\overline{U_{bs}} = U^*_{sb} = (U^{-1})_{sb}.$$

Следовательно,

$$A^{\mu}_{ab} = (U\partial_{\mu}U^{-1})_{ab} + (UA'^{\mu}U^{-1})_{ab}.$$

Отсюда, пользуясь правилом дифференцирования

$$\partial_{\mu}U^{-1} = -U^{-1}\partial_{\mu}UU^{-1},$$

получим

$$A'^{\mu} = U^{-1}A^{\mu}U + U^{-1}\partial_{\mu}U. \tag{1.24}$$

Сравнивая формулы (1.23) и (1.24), убеждаемся в справедливости леммы.

Итак, оператор $A(\xi)$ является аффинной связностью (калибровочным полем). В соответствии с этим входящую в эффективное уравнение (1.16) «удлиненную производную» будем называть ковариантной производной и обозначать

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} \otimes I + A^{\mu}(\xi), \quad D^2 = \sum_{\mu} D^2_{\mu} = (\nabla_{\xi} \otimes I + A(\xi))^2. \tag{1.25}$$

Для заданной связности определим стандартным образом [26] кривизну как коммутатор ковариантных производных

$$R_{\mu\nu} \equiv [D_{\mu}, D_{\nu}]. \tag{1.26}$$

Из (1.25) и (1.26) находим

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{\nu} - \partial_{\nu}A^{\mu} + [A^{\mu}, A^{\nu}]. \tag{1.27}$$

Определяя дифференциальные операторные 1-форму связности

$$\hat{A} = \sum_{\mu} A^{\mu}\, d\xi_{\mu}$$

и 2-форму кривизны

$$\hat{R} = \sum_{\mu<\nu} R_{\mu\nu}\, d\xi_\mu \wedge d\xi_\nu,$$

соотношение (1.27) можно переписать в виде

$$d\hat{A} = \hat{R} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{A}], \tag{1.28}$$

где $[\hat{A}, \hat{A}] = \sum_{\mu,\nu} [A^\mu, A^\nu]\, d\xi_\mu \wedge d\xi_\nu$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Если* $\varphi(\xi) \in C^2(\mathscr{M})$, *то кривизна* $\hat{R} \equiv 0$.

Доказательство. Пользуясь полнотой репера $\{\varphi_a\}$, вычислим матричные элементы коммутатора:

$$[A^\mu, A^\nu]_{ab} = \sum_s\!\!\!\!\!\!\int \langle\varphi_a, \partial_\mu\varphi_s\rangle\langle\varphi_s, \partial_\nu\varphi_b\rangle - \langle\varphi_a, \partial_\nu\varphi_s\rangle\langle\varphi_s, \partial_\mu\varphi_b\rangle =$$

$$= \sum_s\!\!\!\!\!\!\int -\langle\partial_\mu\varphi_a, \varphi_s\rangle\langle\varphi_s, \partial_\nu\varphi_b\rangle + \langle\partial_\nu\varphi_a, \varphi_s\rangle\langle\varphi_s, \partial_\mu\varphi_b\rangle =$$

$$= -\langle\partial_\mu\varphi_a, \partial_\nu\varphi_b\rangle + \langle\partial_\nu\varphi_a, \partial_\mu\varphi_b\rangle.$$

С другой стороны,

$$(\partial_\mu A^\nu)_{ab} = \langle\partial_\mu\varphi_a, \partial_\nu\varphi_b\rangle + \langle\varphi_a, \partial_\mu\partial_\nu\varphi_b\rangle,$$

$$(\partial_\nu A^\mu)_{ab} = \langle\partial_\nu\varphi_a, \partial_\mu\varphi_b\rangle + \langle\varphi_a, \partial_\nu\partial_\mu\varphi_b\rangle.$$

Из этих равенств имеем

$$(R_{\mu\nu})_{ab} = \langle\varphi_a, (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\,\varphi_b\rangle.$$

Поскольку $\varphi \in C^2(\mathscr{M})$, то $(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\,\varphi_b = 0$ для всех b, следовательно, $R_{\mu\nu} \equiv 0$.

Рассмотрим контур C в базовом многообразии $\mathscr{M}$, параметризованный следующим образом:

$$C \ni \xi = \xi(\lambda), \quad \xi_0 = \xi(0), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Аффинная связность A определяет параллельный перенос вдоль контура C. При инфинитезимальном сдвиге $\xi \to \xi + d\xi$ реперные функции преобразуются как

$$\varphi(\xi + d\xi) = \varphi(\xi) + \delta\varphi,$$

где

$$\delta\varphi = \sum_\mu \partial_\mu\varphi\, d\xi_\mu.$$

В силу полноты репера $\varphi = \{\varphi_a\}$ имеем

$$\partial_\mu\varphi_a = \sum_b\!\!\!\!\!\!\int \langle\partial_\mu\varphi_a, \varphi_b\rangle\,\varphi_b = -\sum_b\!\!\!\!\!\!\int A_{ab}\varphi_b,$$

что позволяет представить оператор δ в виде

$$\delta\varphi = -\sum_\mu A^\mu\, d\xi_\mu\varphi = -\hat{A}\varphi. \tag{1.29}$$

Пользуясь введенной параметризацией контура C, отсюда получаем

$$\frac{\delta\varphi}{d\lambda} + \sum_\mu A^\mu(\xi(\lambda))\,\frac{d\xi_\mu}{d\lambda}\,\varphi = 0. \tag{1.30}$$

Уравнение (1.30) вместе с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$ порождают разрешающий оператор $\mathcal{U}(\lambda, 0)$:

$$\varphi(\lambda) = \mathcal{U}(\lambda, 0)\,\varphi(0), \tag{1.31}$$

удовлетворяющий задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{U}(\lambda, 0)}{d\lambda} + \sum\limits_{\mu} A^{\mu}(\xi(\lambda)) \dfrac{d\xi_{\mu}}{d\lambda}\, \mathcal{U}(\lambda, 0) = 0, \\ \mathcal{U}(0, 0) = I. \end{cases} \tag{1.32}$$

Если интеграл от 1-формы связности $\hat{A}(\xi)$ не зависит от контура интегрирования C, то оператор $\mathcal{U}(\lambda, 0)$, который мы будем называть оператором эволюции репера из точки ξ_0 в точку $\xi(\lambda)$, определяется решением задачи (1.32) как упорядоченная экспонента:

$$\mathcal{U}(\xi, \xi_0) = \mathcal{U}(\lambda, 0) = \mathrm{T}\exp\left\{-\int\limits_0^{\lambda} \sum\limits_{\mu} A^{\mu}(\xi(\lambda)) \frac{d\xi_{\mu}}{d\lambda}\, d\lambda\right\}. \tag{1.33}$$

Ортогональность и полнота репера $\{\varphi_a\}$ в каждом гильбертовом слое $\mathcal{F}_{\xi}$ означает унитарность оператора $\mathcal{U}(\xi, \xi_0)$ для всех $\xi, \xi_0 \in \mathcal{M}$:

$$\mathcal{U}^*(\xi, \xi_0) = \mathcal{U}^{-1}(\xi, \xi_0). \tag{1.34}$$

Уравнение (1.32) можно записать также в виде

$$\partial_{\mu}\mathcal{U}(\xi, \xi_0) + A^{\mu}(\xi)\,\mathcal{U}(\xi, \xi_0) = 0,$$

откуда

$$A^{\mu}(\xi) = -\partial_{\mu}\mathcal{U}(\xi, \xi_0)\cdot\mathcal{U}^{-1}(\xi, \xi_0) \quad \forall \xi_0 \in \mathcal{M}. \tag{1.35}$$

Рассматриваемое калибровочное поле $A(\xi)$ может быть устранено подходящим калибровочным преобразованием. Таким преобразованием является оператор $\mathcal{U}^{-1}(\xi, \xi_0)$. В самом деле, справедливо следующее соотношение, проверяемое непосредственно:

$$D_{\mu}^2 = \mathcal{U}\partial_{\mu}^2 \circ \mathcal{U}^{-1}. \tag{1.36}$$

Это соотношение позволяет переписать эффективное уравнение (1.16) в форме

$$[-\mathcal{U}\Delta_{\xi}\circ\mathcal{U}^{-1} + V(\xi)\,\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} + \Lambda\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} - E\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1}]\,\chi = 0.$$

Используя калибровочное преобразование

$$\chi' = \mathcal{U}^{-1}\chi,$$

получаем на χ' уравнение

$$[-\Delta_{\xi} \otimes I + \mathcal{U}^{-1}\Lambda\mathcal{U} + V(\xi) \otimes I]\,\chi' = E\chi', \tag{1.37}$$

не содержащее калибровочного поля.

Заметим, что интеграл в показателе T-экспоненты (1.33) является операторным обобщением фазы Берри [7]—[23] и определяет эволюцию подсистемы, управляемой подгамильтонианом $L(\xi)$, при изменении параметра ξ.

§ 2. Свойства динамических уравнений в адиабатическом представлении задачи трех тел

Описанный в предыдущем параграфе подход может быть, в частности, эффективно использован для анализа систем нескольких частиц. Ниже в основном рассматривается простейшая из таких систем — система трех тел, допускающая использование различных адиабатических представлений [2], [3], [10], [11], [15], [18], [19]. Такие представления в первую очередь определяются выбором базового многообразия $\mathscr{M}$ в представлении конфигурационного пространства M системы трех тел. После отделения движения центра масс конфигурационное пространство $M = \mathbf{R}^6$ системы трех безспиновых частиц рассматривается в этом подходе как многообразие, снабженное атласом $\{\mathfrak{X}_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$, карт $\mathfrak{X}_\alpha$ таких, что каждая $\mathfrak{X}_\alpha$ C^∞-диффеоморфна $\mathbf{R}^6$ и заданы функции перехода $\mathfrak{D}_{\beta\alpha}$: $\mathfrak{X}_\alpha \to \mathfrak{X}_\beta$. Каждая карта $\mathfrak{X}_\alpha$ отвечает одному выделенному набору координат Якоби:

$$x_\alpha = \left(\frac{2m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}\right)^{1/2} (\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\gamma), \qquad y_\alpha = \left(\frac{2m_\alpha (m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}\right)^{1/2} \left(\frac{m_\beta \mathbf{r}_\beta + m_\gamma \mathbf{r}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} - \mathbf{r}_\alpha\right), \tag{2.1}$$

где m_α, m_β, m_γ — массы, а $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{r}_\gamma \in \mathbf{R}^3$ — радиус-векторы частиц в лабораторной системе, так что локально в каждой карте $M = M_{x_\alpha} \times M_{y_\alpha}$, $M_{x_\alpha} = \mathbf{R}^3_{x_\alpha}$, $M_{y_\alpha} = \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$ и $X = \{x_\alpha, y_\alpha\}$ — локальные координаты в $\mathfrak{X}_\alpha$. В терминах этих локальных координат функции перехода $\mathfrak{D}_{\beta\alpha}$ параметризуются массами частиц и имеют вид [27]:

$$\mathfrak{D}_{\beta\alpha}: \begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\beta\alpha} & s_{\beta\alpha} \\ -s_{\beta\alpha} & c_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$c_{\beta\alpha} = -\left(\frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\gamma)(m_\beta + m_\gamma)}\right)^{1/2}, \qquad s^2_{\beta\alpha} + c^2_{\beta\alpha} = 1, \quad s_{\alpha\beta} = -s_{\beta\alpha}.$$

Под гамильтонианом H системы трех тел понимается самосопряженный оператор в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(M)$, являющийся максимальным самосопряженным расширением оператора $\tilde{H}$, заданного на $C^2(M) \subset \mathfrak{H}$ выражением

$$(\tilde{H}\Psi)(X) = \Big(-\Delta_X + \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha(x_\alpha)\Big)\Psi \tag{2.3}$$

в любой из карт $\mathfrak{X}_\alpha$. Для убывающих на бесконечности потенциалов $v_\alpha(x_\alpha)$ область определения $\mathscr{D}(H)$ гамильтониана H совпадает с классом Соболева $W_2^2(M)$.

Выберем в качестве базового многообразия $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$ для некоторой фиксированной пары α. В методе адиабатических представлений следует модифицировать задачу, рассматривая динамику в пространстве

$$\hat{\mathfrak{H}} = \int_{\mathbf{R}^3} \oplus L_2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})\, d^3 y_\alpha. \tag{2.4}$$

Покажем, что собственные функции дискретного спектра и волновые функции, отвечающие процессам рассеяния $2 \to 2$ и $2 \to 3$, лежат в пространстве $\hat{\mathfrak{H}}$.

Определим специальный асимптотический класс $\widehat{\mathcal{B}}$ функций, заданных на $M = \mathbf{R}^6$. Пусть функции $U_{\beta, j}(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n \leqslant \infty$, асимптотически при $|y_\beta| \to \infty$ представимы в виде

$$U_{\beta, j}(y_\beta, x_\beta) = f_{\beta, j}(\hat{y}_\beta)\,\psi_{\beta, j}(x_\beta)\,g_{\beta, j}(|y_\beta|) + O(|y_\beta|^{-2}), \tag{2.5}$$

где $f_{\beta, j}(\hat{y}_\beta)$ — гладкие функции угла $\hat{y}_\beta = y_\beta/|y_\beta|$, $g_{\beta, j}$ — гладкие ограниченные функции, а $\psi_{\beta, j}(x_\beta) \in L_2(\mathbf{R}^3_{x_\beta})$ экспоненциально убывает при $|x_\beta| \to \infty$. Пусть функция $U_0(X)$ асимптотически при $|X| \to \infty$ представима в виде

$$U_0(X) = f_0(\widehat{X})\,F_0(|X|)\,|X|^{-5/2} + O(|X|^{-7/2}), \tag{2.6}$$

где $f_0(\widehat{X})$ — гладкая функция углов $\hat{X} = X/|X|$, а F_0 — гладкая ограниченная функция. Будем говорить, что функция $\Psi(X)$ принадлежит асимптотическому классу $\widehat{\mathcal{B}}$, если она представима в виде

$$\Psi(X) = U_0(X) + \sum_\beta \sum_j U_{\beta, j}(X). \tag{2.7}$$

Теорема 1. *Имеет место вложение*

$$(W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^6) \cap \widehat{\mathcal{B}}) \cap \widehat{\mathfrak{H}}.$$

Доказательство. Необходимо показать, что функция $\Psi(X) \in W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^6) \cap \widehat{\mathcal{B}}$ является квадратично-интегрируемой по слою $\mathbf{R}^3_{x_\alpha}$ для всех значений $y_\alpha \in \mathbf{R}^3$. Обозначим через $\Theta_R(X)$ некоторую гладкую срезающую функцию:

$$\Theta_R(X) = \begin{cases} 1, & |X| < R, \\ 0, & |X| > R + 1, \end{cases} \qquad \Theta_R(X) \in C^\infty(\mathbf{R}^6),$$

и представим $\Psi(X)$ в виде $\Psi = \Theta_R\Psi + (1 - \Theta_R)\Psi$. Через K_R обозначим шар в $\mathbf{R}^6$: $K_R = \{X\colon |X| \leqslant R + 1\}$. Поскольку $\Psi \in W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^6)$, то для всех $R < \infty$ функция $\Theta_R\Psi \in W^2_2(K_R)$. На компактном множестве K_R соответствующая теорема вложения [28] дает

$$W^2_2(K_R) \subset L_2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha} \cap \{x_\alpha : |x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2 \leqslant R + 1\}].$$

Тем самым, $\Theta_R\Psi \in \widehat{\mathfrak{H}}$.

Поскольку $\Psi \in \widehat{\mathcal{B}}$, то для функции $(1 - \Theta_R)\Psi$ при достаточно больших R справедлива асимптотика, задаваемая формулами (2.5)—(2.7). Экспоненциальное убывание функций $\psi_{\beta, j}(x_\beta)$ при $|x_\beta| \to \infty$ обеспечивает сходимость интеграла

$$\int\limits_{x_\beta : |X| > R} |U_{\beta, j}|^2\, d^3x_\beta$$

для всех y_α. Множитель $|X|^{5/2} = (|x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2)^{5/4}$ в асимптотике (2.6) гарантирует сходимость интеграла

$$\int\limits_{x_\alpha : |X| > R} |U_0|^2\, d^3x_\alpha$$

для всех y_α. Таким образом, $(1 - \Theta_R)\Psi \in \widehat{\mathfrak{H}}$ и, окончательно, $\Psi \in \widehat{\mathfrak{H}}$.

Если потенциалы $v_\alpha(x_\alpha)$ убывают при $|x_\alpha| \to \infty$ не медленнее, чем $O(|x_\alpha|^{-1})$, и являются достаточно гладкими, то собственные функции дискретного спектра гамильтониана H принадлежат $W_2^2(\mathbf{R}^6) \bigcap \widehat{\mathscr{B}}$. Асимптотическое поведение волновых функций задачи рассеяния для пары операторов $H, H_0 = -\Delta_X$, отвечающих процессам $2 \to 2$, $2 \to 3$ [27], определяет их принадлежность классу $W_{2,\,\mathrm{loc}}^2(\mathbf{R}^6) \bigcap \widehat{\mathscr{B}}$. Доказанная выше теорема 1 обеспечивает принадлежность перечисленных функций пространству $\widehat{\mathfrak{H}}$.

Иначе обстоит дело с волновыми функциями задачи рассеяния, отвечающими процессам $3 \to 3$. Как известно [27], их асимптотики содержат 6-мерную плоскую волну $\exp\{i\langle P, X\rangle\}$, которая не является квадратично-интегрируемой в $\mathbf{R}^3_{x_\alpha}$, и потому такие функции не лежат в $\widehat{\mathfrak{H}}$. Поэтому процессы $3 \to 3$ здесь рассматриваться не будут.

Переход к пространству $\widehat{\mathfrak{H}}$ позволяет использовать описанный в § 1 метод адиабатических представлений в терминах координат Якоби. Фиксируем карту $\mathfrak{X}_\alpha$ и выберем в качестве базового многообразия $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$. Представим гамильтониан H в виде

$$H = \Delta_{y_\alpha} \otimes I_{x_\alpha} + \int_{\mathscr{M}} \oplus L(y_\alpha)\, d^3 y_\alpha, \tag{2.8}$$

где реперные операторы

$$L(y_\alpha) = -\Delta_{x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{3} v_\beta(x_\beta) \tag{2.9}$$

действуют в гильбертовых слоях $\mathscr{F}_{y_\alpha} \simeq L_2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})$ и самосопряжены на естественных областях определения $W_2^2(\mathbf{R}^3)$.

Опишем свойства реперного оператора $L(y_\alpha)$, определенного выражением (2.9). Дискретный спектр $\sigma_\alpha(L(y_\alpha)) = \{\varepsilon_n(y_\alpha)\}$ определяет термы — функции $\varepsilon_n(y_\alpha)$ (мультииндекс n включает набор квантовых чисел, фиксирующих связанные состояния). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Если $v_\beta(x_\beta) \to 0$ при $|x_\beta| \to \infty$, $\beta = 1, 2, 3$, то реперный оператор $L(y_\alpha)$ самосопряжен на $W_2^2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})$, а его непрерывный спектр совпадает с полуосью $[0, \infty)$ для всех $y_\alpha \in \mathscr{M} = \mathbf{R}^3$.*

Доказательство этого утверждения не отличается от стандартного (см., например, [29]), поскольку при каждом y_α оператор $L(y_\alpha)$ описывает одночастичное рассеяние на сумме трех потенциалов.

Основным объектом, полученным в результате описанной в § 1 процедуры размерной редукции, является эффективное уравнение (1.16), решения которого ищутся в классах функций, описываемых леммой 2. Для системы трех тел в рассматриваемом представлении это уравнение содержит калибровочное поле

$$A_{ab}(y_\alpha) = \langle \varphi_a, \nabla_{y_\alpha}\varphi_b\rangle = \int \varphi_a(x_\alpha, y_\alpha)\, \nabla_{y_\alpha}\overline{\varphi_b}\, d^3 x_\alpha \tag{2.10}$$

и приобретает вид

$$[-(\nabla_{y_\alpha} \otimes I + A(y_\alpha))^2 + \Lambda(y_\alpha)]\, \chi(y_\alpha) = E\chi(y_\alpha), \tag{2.11}$$

где «векторный коэффициент» $\chi(y_\alpha) = \{\chi_a(y_\alpha)\}$ имеет компоненты

$$\chi_a(y_\alpha) = \langle \varphi_a, \Psi\rangle = \int \varphi_a(x_\alpha, y_\alpha)\, \overline{\Psi(X)}\, d^3 x_\alpha. \tag{2.12}$$

Под $\Psi(X)$ понимается решение уравнения Шрёдингера (1.12) для трехчастичного гамильтониана H, представленного в форме (2.8), а $\varphi_a(x_\alpha, y_\alpha)$ — собственные функции реперного оператора $L(y_\alpha)$.

Выясним, каким образом свойства симметрии исходной трехтельной задачи проявляются в эффективном уравнении. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Сферическая симметрия задачи сохраняется при переходе к эффективному уравнению* (2.11), *т. е. если* $v_\beta(x_\beta) = v_\beta(|x_\beta|)$, $\beta = 1, 2, 3$, *то* $\Lambda(y_\alpha) = \Lambda(|y_\alpha|)$ *и* $A(y_\alpha) = A(|y_\alpha|)$.

Доказательство. Линейное преобразование, связывающее различные наборы приведенных якобиевых координат, позволяет записать сферически-симметричный потенциал v_β в виде:

$$v_\beta(|x_\beta|) = v_\beta(|c_{\beta\alpha}x_\alpha + s_{\beta\alpha}y_\alpha|) = v_\beta\left(|c_{\beta\alpha}|\left|x_\alpha + |y_\alpha|\frac{s_{\beta\alpha}}{c_{\beta\alpha}}\right|\right),$$

где $\hat{y}_\alpha = y_\alpha/|y_\alpha|$. Обозначим через $\mathcal{S} \in SO(3)$ вращение на сфере в $\mathbf{R}^3_{y_\alpha}$ и сравним реперные операторы $L(y_\alpha)$ и

$$L(\mathcal{S}y_\alpha) = -\Delta_{x_\alpha} + v_\alpha(|x_\alpha|) + \sum_{\beta\neq\alpha} v_\beta(x_\alpha, \mathcal{S}y_\alpha).$$

Введем замену переменных $x'_\alpha = \mathcal{S}^{-1}x_\alpha$. В силу $SO(3)$-инвариантности оператора Лапласа $\Delta_{x_\alpha} = \Delta_{x'_\alpha}$ имеем

$$L(\mathcal{S}y_\alpha) = -\Delta_{x'_\alpha} + v_\alpha(|x'_\alpha|) + \sum_{\beta\neq\alpha} v_\beta\left(|c_{\beta\alpha}|\left|\mathcal{S}x'_\alpha + |y_\alpha|\,\frac{s_{\beta\alpha}}{c_{\beta\alpha}}\,\mathcal{S}\hat{y}_\alpha\right|\right) =$$

$$= -\Delta_{x'_\alpha} + v_\alpha(|x_\alpha|) + \sum_{\beta\neq\alpha} v_\beta\left(|c_{\beta\alpha}|\left|\mathcal{S}\left(x'_\alpha + |y_\alpha|\frac{s_{\beta\alpha}}{c_{\beta\alpha}}\hat{y}_\alpha\right)\right|\right) =$$

$$= -\Delta_{x'_\alpha} + v_\alpha(|x_\alpha|) + \sum_{\beta\neq\alpha} v_\beta(x'_\alpha, y_\alpha).$$

Таким образом, оператор $L(\mathcal{S}y_\alpha)$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3'}_{\mathcal{S}^{-1}x_\alpha})$ задается тем же дифференциальным выражением, что и оператор $L(y_\alpha)$ в пространстве $L_2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})$, а их области определения совпадают. Следовательно, для термов и собственных функций имеем

$$\varepsilon_n(\mathcal{S}y_\alpha) = \varepsilon_n(y_\alpha) = \varepsilon_n(|y_\alpha|), \text{ т. е. } \Lambda(y_\alpha) = \Lambda(|y_\alpha|);$$
$$\varphi_a(\mathcal{S}x_\alpha, y_\alpha) = \varphi_a(x_\alpha, \mathcal{S}y_\alpha). \tag{2.13}$$

Для компонент калибровочного поля находим соответственно:

$$A^\mu_{ab}(\mathcal{S}y_\alpha) = \int \varphi_a(x_\alpha, \mathcal{S}y_\alpha)\,\partial_\mu\overline{\varphi_b(x_\alpha, \mathcal{S}y_\alpha)}\,d^3x_\alpha =$$

$$= \int_0^\infty |x_\alpha|^2 d|x_\alpha| \int_{S^2} \varphi_a(\mathcal{S}x_\alpha, y_\alpha)\,\partial_\mu\overline{\varphi_b(\mathcal{S}x_\alpha, y_a)}\,d\hat{x}_\alpha.$$

Пользуясь заменой переменных $x''_\alpha = \mathcal{S}x_\alpha$, отсюда получаем

$$A^\mu_{ab}(\mathcal{S}y_\alpha) = \int_0^\infty |x''_\alpha|^2 d|x''_\alpha| \int_{S^2} \varphi_a(x''_\alpha, y_\alpha)\,\partial_\mu\varphi_b(x''_\alpha, y_\alpha)\,\partial\hat{x}''_\alpha = A^\mu_{ab}(y_\alpha),$$

и, следовательно,

$$A(\mathcal{S}y_\alpha) = A(y_\alpha) = A(|y_\alpha|).$$

Доказанная теорема позволяет ответить на вопрос о зависимости интеграла в показателе T-экспоненты (1.33) от контура интегрирования. Именно, имеет место

Следствие 1. *Интеграл* $\oint\limits_{C}\sum\limits_{\mu} A^{\mu}(y_\alpha)\frac{dy^{\mu}_{\alpha}}{d\lambda}d\lambda$ *по замкнутому контуру* $C\subset\mathbf{R}^3_{y_\alpha}$ *такому, что для всех* $y_\alpha\in C$: $|y_\alpha| = \mathrm{Const}$, *равен нулю.*

Этот факт позволяет предложить способ определения оператора эволюции $\mathcal{U}(y_\alpha, y_{\alpha 0})$ с помощью формулы (1.33). Именно, для того, чтобы угол между лучами $[0, y_\alpha)$ и $[0, y_{\alpha 0})$ не входил в ответ, следует составить контур интегрирования, связывающий точки $y_{\alpha 0}$ и y_α из отрезков $[y_{\alpha 0}, 0]$ и $[0, y_\alpha]$.

Проследим теперь, каким образом оператор поля $A(y_\alpha)$ связан с физическими параметрами изучаемой системы трех тел. Именно, убедимся, что в отсутствие пересечения термов используемое здесь адиабатическое представление (1.16) с выбором в качестве базового многообразия $\mathcal{M} = \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$ (т. е. с усреднением по движению подсистемы α) является удобным средством изучения трехтельных систем (за счет малости A_{ab}), в которых выделенная подсистема оказывается «медленной», т. е. $m_\alpha \ll m_\beta$, $m_\alpha \ll m_\gamma$. Это обстоятельство позволяет использовать в конкретных расчетах такого рода систем не двухцентровые адиабатические разложения, а предлагаемый здесь подход.

Для доказательства малости внедиагональных элементов в отсутствие пересечения термов при $m_\alpha \ll m_\beta$, $m_\alpha \ll m_\gamma$ выпишем для компонент поля $A(y_\alpha)$ представление типа Гельмана — Фейнмана [30].

Продифференцируем реперное уравнение (1.7) по $y^{\mu}_{\alpha} = \xi_\mu$:

$$[-\Delta_{x_\alpha} + V(x_\alpha, y_\alpha) - \varepsilon_b(y_\alpha)]\,\partial_\mu\varphi_b + [\partial_\mu V - \partial_\mu\varepsilon_b]\,\varphi_b = 0.$$

Здесь через $V(x_\alpha, y_\alpha)$ обозначено полное взаимодействие в системе: $V = \sum\limits_{\beta} v_\beta(x_\beta)$. Умножая это соотношение на φ_a и интегрируя по $\mathbf{R}^3_{x_\alpha}$, получаем

$$\langle\varphi_a, [-\Delta_{x_\alpha} + V - \varepsilon_b]\,\partial_\mu\varphi_b\rangle + \langle\varphi_a, \partial_\mu V\varphi_b\rangle - \partial_\mu\varepsilon_b\delta_{ab} = 0.$$

Самосопряженность реперного оператора $L(y_\alpha) = -\Delta_{x_\alpha} + V(x_\alpha, y_\alpha)$ позволяет «перебросить» в скалярном произведении действие оператора $L(y_\alpha)$ на функцию φ_a и, воспользовавшись тем, что $L(y_\alpha)\varphi_a = \varepsilon_a\varphi_a$, получить

$$A^{\mu}_{ab}(y_\alpha) = [\varepsilon_a(y_\alpha) - \varepsilon_b(y_\alpha)]^{-1}\{\langle\partial_\mu V\varphi_a, \varphi_b\rangle - \partial_\mu\varepsilon_b\delta_{ab}\}. \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует равенство

$$\varepsilon_a(y_\alpha) = \varepsilon_a(y_{\alpha 0}) + \int\limits_{C}\sum\limits_{\mu}\partial_\mu V|\varphi_a|^2\frac{dy^{\mu}_{\alpha}}{d\lambda}d\lambda, \tag{2.15}$$

где контур $C\subset\mathbf{R}^3_{y_\alpha}$ параметризован числом $\lambda\in\mathbf{R}$ и связывает точки $y_{\alpha 0}$, y_α.

Внедиагональные элементы $A_{ab}(y_\alpha)$, $a\neq b$, определяют зацепление эффективных уравнений в системе (2.11), тем самым, их абсолютные величины характеризуют степень неадиабатичности системы. В отсутствие пересечения термов, $\varepsilon_a\neq\varepsilon_b$, $a\neq b$, величина A^{μ}_{ab} определяется выражением

$$\langle \partial_\mu V \varphi_a, \varphi_b \rangle = \int \partial_\mu \left[v_\alpha (x_\alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha} v_\beta (x_\beta) \right] \varphi_a (x_\alpha, y_\alpha) \overline{\varphi_b (x_\alpha, y_\alpha)} d^3 x_\alpha =$$

$$= \sum_{\beta \neq \alpha} \int \partial_\mu v_\beta (x_\beta) \varphi_a \overline{\varphi_b}\, d^3 x_\alpha .$$

Для сферически-симметричных взаимодействий $v_\beta = v_\beta(r)$ эти функции зависят от одномерного параметра $r \in \mathbf{R}_+$. В этом случае

$$\partial_\mu v_\beta (x_\beta) = \frac{dv_\beta}{dr} \frac{\partial}{\partial y_\alpha^\mu} | c_{\beta\alpha} x_\alpha + s_{\beta\alpha} y_\alpha | = \frac{dv_\beta}{dr} (x_\alpha, y_\alpha) s_{\beta\alpha} \hat{r}_\beta^\mu .$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации получаем

$$A_{ab}^\mu (y_\alpha) = [\varepsilon_a (y_\alpha) - \varepsilon_b (y_\alpha)]^{-1} \sum_{\beta \neq \alpha} s_{\beta\alpha} \int \frac{dv_\beta}{dr} (x_\alpha, y_\alpha) \hat{x}_\beta^\mu \varphi_a \overline{\varphi_b} d^3 x_\alpha . \qquad (2.16)$$

Из (2.16) видно, что внедиагональные элементы A_{ab} пропорциональны массовым коэффициентам $| s_{\beta\alpha} | = \left(m_\alpha \dfrac{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}{(m_\alpha + m_\beta)(m_\alpha + m_\gamma)} \right)^{1/2}$. Поскольку $s_{\beta\alpha} \xrightarrow[m_\alpha \to 0]{} 0$, то из (2.16) получаем декларированную выше малость внедиагональных элементов A_{ab} при $m_\alpha \ll m_\beta$, $m_\alpha \ll m_\gamma$.

Отметим также, что в используемой здесь схеме калибровочное поле $A(y_\alpha)$ не имеет сингулярности в точке $y_\alpha = 0$, поскольку точка $y_\alpha = 0$ не является точкой сингулярности потенциала $V = \sum v_\beta (x_\beta)$.

§ 3. Спектральное проецирование — выделение нетривиальных связностей

Построенные в § 1 операторы связности $A(\xi)$ и эволюции репера $\mathcal{U}(\xi, \xi_0)$ могут быть ассоциированы со спектральным разложением гильбертова слоя $\mathcal{F}_\xi$ на собственные подпространства реперного оператора $L(\xi)$. В работе [10] использовалось наиболее простое разложение вида $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi^d \oplus \mathcal{F}_\xi^c$, где $\mathcal{F}_\xi^{d,c} = P_\xi^{d,c} \mathcal{F}_\xi$, $P_\xi^{d,c}$ — спектральные проекторы на дискретное и абсолютно непрерывное подпространство оператора $L(\xi)$. Такое разложение, однако, является достаточно грубым. Более деликатным представляется использовать в каждом интервале энергий свое разложение и по отдельности учитывать вклады открытых и закрытых по энергии каналов в данные рассеяния.

Процедура спектрального проецирования, основанная на методе Фешбаха [31], позволяет перейти от бесконечномерной системы (1.16) зацепленных уравнений к некоторой конечной системе, в которой вклад закрытых каналов (малый в специальном асимптотическом смысле) учитывается эффективным образом. Такая редукция открывает возможность проведения численных расчетов в рамках метода адиабатических представлений.

С другой стороны, спектральное проецирование позволяет выделить нетривиальную кривизну, порожденную спроецированной связностью, и записать обобщенное условие адиабатичности системы в геометрических терминах в форме уравнения нулевой кривизны.

Итак, рассмотрим квантовомеханическую систему в области энергий $E \leqslant E_0$ для некоторой фиксированной энергии E_0. По данному E_0 определим функцию

$$a(\xi) = \max_a \{a\colon \varepsilon_a(\xi) \leqslant E_0\} \tag{3.1}$$

и обозначим

$$a_0 \equiv \max_\xi a(\xi). \tag{3.2}$$

Введем операторы проецирования, обобщающие соответствующие операторы Фешбаха [31]:

$$P_{E_0} = \sum_{a \leqslant a_0} \int \langle \varphi_a, \cdot \rangle \varphi_a, \quad Q_{E_0} = I_{\hat{\mathfrak{H}}} - P_{E_0}. \tag{3.3}$$

Легко проверить, что $P_{E_0} = P^*_{E_0}$ в $\mathfrak{H}$ и $P^2_{E_0} = P_{E_0}$, т. е. P_{E_0}, Q_{E_0} — ортогональные проекторы в $\hat{\mathfrak{H}}$. С другой стороны, операторы P_{E_0}, Q_{E_0}, задаваемые формулами (3.3), можно рассматривать как операторы в $\mathcal{F}_\xi$ при фиксированном ξ; такие объекты будем обозначать $P_{E_0}(\xi)$, $Q_{E_0}(\xi)$. Операторы $P_{E_0}(\xi)$, $Q_{E_0}(\xi)$ самосопряжены относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слое $\mathcal{F}_\xi$.

Определим операторы A_P и A^2_Q с матричными элементами

$$(A_P)_{ab} = A_{ab}, \quad a, b \leqslant a_0, \quad (A^2_Q)_{ab} = \langle Q_{E_0} \nabla_\xi \varphi_a, Q_{E_0} \nabla_\xi \varphi_b \rangle, \ a, b \leqslant a_0. \tag{3.4}$$

Эти операторы связаны соотношением

$$\langle \varphi_a, \Delta_\xi \varphi_b \rangle = \nabla_\xi (A_P)_{ab} + (A^2_P)_{ab} - (A^2_Q)_{ab}, \tag{3.5}$$

проверяемым непосредственно.

Применяя к уравнению Шрёдингера $H\Psi = E\Psi$ проекторы P_{E_0}, Q_{E_0}, исключая переменную $Q_{E_0}\Psi$ и используя адиабатическое представление для $P_{E_0}\Psi$, с учетом (3.4), (3.5) имеем

$$[-(\nabla_\xi \otimes I + A_P)^2 + V(\xi) \otimes I + \Lambda_P + \boldsymbol{A}^2_Q + W(E)]\, \chi_P = E\chi_P, \tag{3.6}$$

где $\Lambda_P = \operatorname{diag}\{\varepsilon_a(\xi)\}_{a \leqslant a_0}$, $\chi_P = \{\chi_a(\xi)\}_{a \leqslant a_0}$, а через $W(E)$ обозначен зависящий от спектрального параметра E оператор в подпространстве $\mathcal{P}_{E_0}\hat{\mathcal{H}}$, задаваемый матричными элементами

$$W_{ab}(E)\colon \eta(\xi) \mapsto -\langle HQ_{E_0}(Q_{E_0}HQ_{E_0} - E)^{-1} Q_{E_0} H(\eta\varphi_b), \varphi_a \rangle. \tag{3.7}$$

Эффект закрытых каналов $(I - \mathcal{P}_{E_0})\hat{\mathcal{H}}$ проявляется как в операторе $A^2_Q(\xi)$, так и в энергозависящем операторе взаимодействия $W(E)$. Последний содержит квазирезольвенту $R_Q(E) = Q_{E_0}(Q_{E_0}HQ_{E_0} - E)^{-1}Q_{E_0}$ на подпространстве $Q_{E_0}\hat{\mathfrak{H}}$ и, тем самым, содержит все трудности исходной задачи. Поэтому для эффективного использования уравнения (3.6) следует, вообще говоря, строить те или иные модельные представления операторов $W_{ab}(E)$ [19].

Вопрос о сохранении энергии в подпространстве открытых каналов $\mathcal{P}_{E_0}\hat{\mathcal{H}}$ связан с вопросом об эрмитовости эффективного оператора в левой части уравнения (3.7), т. е. в конце концов с эрмитовостью операторов $W_{ab}(E)$. В ситуации общего положения операторы $W_{ab}(E)$ несимметричны:

$$\operatorname{Im} W(E) = \frac{1}{2i}(W(E) - W^*(E)) \sim -\mathcal{P}_{E_0} H\hat{G}(E) H\mathcal{P}_{E_0},$$

где через $\widehat{G}(E)$ обозначен скачок квазирезольвенты $R_Q(E)$ на непрерывном спектре:

$$\widehat{G}(E) = -\frac{1}{2i}(R_Q(E+i0) - R_Q(E-i0)).$$

Для системы трех тел этот скачок равен нулю лишь в той области энергий E, где закрыты каналы развала и перестройки, т. е. допустимы лишь процессы рассеяния на связанной паре без ее возбуждения (чистая адиабатика, упругое рассеяние) или с возбуждением (неупругое рассеяние).

Если нижние N термов реперного оператора $L(\xi)$ не пересекаются и не выходят в непрерывный спектр при всех $\xi \in \mathscr{M}$, то при любом $a_0 \leqslant N$ проекторы P_{E_0}, Q_{E_0} могут быть построены следующим образом. Отсутствие пересечения термов означает существование таких функций $\hat{\varepsilon}_{a_0}(\xi)$ и таких $\delta > 0$, что

$$\operatorname{dist}\{\hat{\varepsilon}_{a_0}(\xi), \sigma(L(\xi))\} \geqslant \delta > 0, \tag{3.8}$$

а спектр $L(\xi)$ левее $\hat{\varepsilon}_{a_0}(\xi)$ чисто дискретен и содержит $a_0 \leqslant N$ собственных чисел. Для фиксированной точки ξ построим контур $\Gamma(\xi)$, охватывающий эти собственные числа, лежащие левее $\hat{\varepsilon}_{a_0}(\xi)$, и определим проекторы

$$P_{a_0}(\xi) = \frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma(\xi)} (L(\xi) - z)^{-1}\, dz.$$

В силу (3.8) размерность образа $\dim \operatorname{Ran} P_{a_0}(\xi) = a_0$ и не зависит от точки базы ξ. Тогда проектор P_{E_0} для $E_0 < \varepsilon_{a_0} = \inf_{\xi} \hat{\varepsilon}_{a_0}(\xi)$ восстанавливается по $P_{a_0}(\xi)$ следующим образом:

$$P_{E_0} = \oint_{\mu} \oplus P_{a_0}(\xi)\, d\xi. \tag{3.9}$$

Соответствующий P_{E_0} проектор, действующий в пространстве $\widehat{\mathscr{H}}$, обозначим $\mathscr{P}_{E_0}$,

$$\mathscr{P}_{E_0}: \eta = \{\eta_a\} \mapsto \mathscr{P}_{E_0}\eta, \quad (\mathscr{P}_{E_0}\eta)_a = \begin{cases} \eta_a, & a \leqslant a_0, \\ 0, & a > a_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Тогда, очевидно, $\chi_P = \mathscr{P}_{E_0}\chi$, $A_P = \mathscr{P}_{E_0} A \mathscr{P}_{E_0}$, $\Lambda_P = \mathscr{P}_{E_0} \Lambda \mathscr{P}_{E_0}$. Рассмотрим оператор A_P как аффинную связность и вычислим соответствующую форму кривизны

$$\hat{R}_P = \sum_{\mu<\nu} (R_P)_{\mu\nu} d\xi_\mu \wedge d\xi_\nu, \quad (R_P)_{\mu\nu} = \partial_\mu A_P^\nu - \partial_\nu A_P^\mu + [A_P^\mu, A_P^\nu]. \tag{3.11}$$

Нам потребуется следующее определение.

Определение 2. Подпространство $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ называется адиабатическим подпространством для семейства реперных операторов $\{L(\xi)\}$, $\xi \in \mathscr{M}$, если для любой реперной функции $\varphi_a(\xi_0) \in \mathscr{F}_0$, лежащей в $\mathscr{F}_0$ при некотором $\xi_0 \in \mathscr{M}$,

$$\varphi_a(\xi) = (\mathscr{U}(\xi, \xi_0)\, \varphi(\xi_0))_a \in \mathscr{F}_0$$

для всех точек базы $\xi \in \mathscr{M}_0$, лежащих в некоторой области $\mathscr{M}_0 \cup \mathscr{M}$. Область $\mathscr{M}_0$ называется областью адиабатического изменения параметра ξ.

Теорема 3. *Если* $\varphi(\xi) \in C^2(\mu_0)$ *и подпространство* $\mathcal{F}_0 = \mathcal{L}\{\varphi_a\}_{a \leqslant a_0}$ *является адиабатическим для семейства реперных операторов* $\{L(\xi)\}$ *в области* $\mathcal{M}_0$, *то соответствующая форма кривизны на* $\mathcal{M}_0$ *обращается в ноль*: $\widehat{R}_P|_{\mathcal{M}_0} \equiv 0$.

Доказательство. Повторяя выкладки, использованные при доказательстве леммы 4, имеем:

$$(R_{P\mu\nu})_{ab} = \sum_{s > a_0}\!\!\!\!\int \langle \partial_\nu \varphi_a, \varphi_s\rangle \langle \varphi_s, \partial_\mu \varphi_b\rangle - \langle \partial_\mu \varphi_a, \varphi_s\rangle \langle \varphi_s, \partial_\nu \varphi_b\rangle. \tag{3.12}$$

Если подпространство $\mathcal{F}_0$ — адиабатическое для семейства $\{L(\xi)\}$ в области $\mathcal{M}_0$, то для всех $\varphi_a \in \mathcal{F}_0$ (т. е. при $a \leqslant a_0$) в любой точке $\xi \in \mathcal{M}_0$ имеем $\varphi_a(\xi + d\xi) \in \mathcal{F}_0$. Для гладких φ_a, очевидно, выполнено равенство

$$\varphi_a(\xi + d\xi) = \varphi_a(\xi) + \sum_\mu \partial_\mu \varphi_a d\xi_\mu.$$

Отсюда $\partial_\mu \varphi_a \in \mathcal{F}_0$. Следовательно, $\langle \partial_\mu, \varphi_a, \varphi_s\rangle = 0$ для всех $s > a_0$, что, вместе с формулой (3.12), доказывает теорему.

Доказанная теорема позволяет сформулировать необходимое условие адиабатичности в геометрических терминах. Учитывая формулу (1.28), это условие (условие нулевой кривизны $\widehat{R}_P = 0$) можно записать в виде нелинейного уравнения на оператор $A_P(\xi)$ в области $\mathcal{M}_0$:

$$d\hat{A}_P = \frac{1}{2}[\hat{A}_P, \hat{A}_P]. \tag{3.13}$$

Обратимся теперь к примеру, рассмотренному в § 2,— системе трех тел — и свяжем спектральное проецирование с процедурой ренормировки. Для этого определим операторы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^+\mathfrak{A}$ и $\langle V\rangle$ с матричными элементами

$$(\mathfrak{A}^+)_{ab} = \langle \varphi_a, \nabla_{x_\alpha} \varphi_b\rangle, \quad (\mathfrak{A}^+\mathfrak{A})_{ab} = -\langle \varphi_a, \Delta_{x_\alpha} \varphi_b\rangle, \quad \langle V\rangle_{ab} = \langle \varphi_a, V\varphi_b\rangle. \tag{3.14}$$

Эффективное уравнение (2.11) в терминах этих операторов можно переписать в виде

$$[-D^2 + \mathfrak{A}^+\mathfrak{A} + \langle V\rangle]\,\chi = E\chi. \tag{3.15}$$

Будем интерпретировать неотрицательный оператор $\mathfrak{A}^+\mathfrak{A}$ как оператор массы, а $\langle V\rangle$ — как усредненный оператор взаимодействия. В подпространстве $\mathcal{P}_{E_0}\widehat{\mathcal{H}}$ определим следующие объекты:

$$\mathfrak{A}_P^+ = \mathcal{P}_{E_0}\mathfrak{A}^+\mathcal{P}_{E_0}, \quad \langle V_P\rangle = \mathcal{P}_{E_0}\langle V\rangle\mathcal{P}_{E_0}. \tag{3.16}$$

Поскольку набор реперных функций $\{\varphi_a\}_{a \leqslant a_0}$ не является полным во всем слое $\mathcal{F}_{y_\alpha}$, то, вычисляя «массовый член» $\mathfrak{A}_P^+\mathfrak{A}_P$, получим его в ренормированном виде:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_P^+\mathfrak{A}_P)_{ab} &= (\mathfrak{A}^+\mathfrak{A})_{ab} - M_{ab}, \\ M_{ab} &= \sum_{s > a_0}\!\!\!\!\int \langle \Delta_{x_\alpha}\varphi_a, \varphi_s\rangle \langle \varphi_s, \nabla_{x_\alpha}\varphi_b\rangle. \end{aligned} \tag{3.17}$$

При этом уравнение (3.15) можно записать в виде, аналогичном (3.6):

$$[-D_P^2 + A_Q^2 + \mathfrak{A}_P^+\mathfrak{A}_P + M + W(E)]\,\chi_P = E\chi_P, \tag{3.18}$$

где $D_P = \nabla_{y_\alpha} \otimes I + A_P(y_\alpha)$, $M = \{M_{ab}\}_{a, b \leqslant a_0}$.

II. Асимптотический анализ динамических уравнений

§ 4. Координатные асимптотики репера

В данном разделе мы рассматриваем систему трех тел в адиабатическом представлении, построенном в § 2. Эффективное уравнение (2.11) задано на некомпактной области $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3_{y_\alpha}$, и потому для однозначной разрешимости его следует дополнить асимптотическими граничными условиями при $|y_\alpha| \to \infty$. Постановка таких граничных условий может быть проведена по следующей схеме. Асимптотики трехтельной волновой функции $\Psi(X)$, приведенные, например, в монографии [27], известны. Следует вычислить асимптотики реперных функций $\varphi_a(x_\alpha, y_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$, а затем, воспользовавшись формулой (2.12), найти асимптотики $\chi_a(y_\alpha)$.

Оказывается, однако (см. § 5), что для нахождения асимптотик $\chi_a(y_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$ нет необходимости явно строить асимптотики репера $\varphi_a(x_\alpha, y_\alpha)$ при больших параметрах $|y_\alpha|$, а достаточно лишь изучить поведение φ_a в разных областях конфигурационного пространства $\mathbf{R}^3_{x_\alpha}$.

Изучим сначала дискретный спектр оператора $L(y_\alpha)$, определяемого выражением (2.9). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Если потенциалы v_γ, $\gamma = 1, 2, 3$, асимптотически убывают как $v_\gamma(x_\gamma) = |x_\gamma|^{-3-\nu}(1 + o(1))$, $\nu > 0$ при $|x_\gamma| \to \infty$, то для собственных функций дискретного спектра оператора $L(y_\alpha)$ имеет место следующее представление:*

$$\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha) = Q^n_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) + \sum_{\beta\neq\alpha} Q^n_\beta(x_\alpha, y_\alpha), \tag{4.1}$$

где

$$Q^n_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \underset{|x_\alpha|\to\infty}{=} f^n_\alpha(\hat{x}_\alpha, y_\alpha)\frac{\exp\{-\sqrt{|\varepsilon_n(y_\alpha)|}\,|x_\alpha|\}}{|x_\alpha|} + O(|x_\alpha|^{-2}),$$

$$Q^n_\beta(x_\alpha, y_\alpha) \underset{|x_\beta|\to\infty}{=} f^n_\beta(\hat{x}_\beta, y_\alpha)\frac{\exp\{-\sqrt{|\varepsilon_n(y_\alpha)|}\,|x_\beta|/|c_{\beta\alpha}|\}}{|x_\beta|} + O(|x_\beta|^{-2}). \tag{4.2}$$

Здесь f^n_α, f^n_β — некоторые гладкие функции.

Доказательство. Перепишем реперное уравнение

$$L(y_\alpha)\,\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha) = \varepsilon_n(y_\alpha)\,\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha) \tag{4.3}$$

в интегральной форме

$$\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha) = -\int dx'_\alpha \frac{\exp\{-\sqrt{|\varepsilon_n(y_\alpha)|}\,|x_\alpha - x'_\alpha|\}}{4\pi|x_\alpha - x'_\alpha|}\sum_\beta v_\beta(x'_\beta)\,\varphi_n(x'_\alpha, y_\alpha). \tag{4.4}$$

Разобьем правую часть (4.4) на три слагаемых:

$$Q^n_\beta = -\int dx'_\alpha \frac{\exp\{-\sqrt{|\varepsilon_n(y_\alpha)|}\,|x_\alpha - x'_\alpha|\}}{4\pi|x_\alpha - x'_\alpha|} v_\beta(x'_\beta)\,\varphi_n(x'_\alpha, y_\alpha), \quad \beta = 1, 2, 3, \tag{4.5}$$

и в слагаемых с $\beta \neq \alpha$ сделаем замену $x'_\alpha = c^{-1}_{\beta\alpha}x'_\beta - s_{\beta\alpha}c^{-1}_{\beta\alpha}y_\alpha$. Далее стандартными методами [32] можно показать, что Q^n_α, Q^n_β при $|x_\alpha| \to \infty$,

$|x_\beta| \to \infty$ соответственно представимы в виде (4.2), что и доказывает лемму.

Можно получить и более детальную информацию об асимптотическом поведении реперных функций φ_n дискретного спектра. Именно, введем двутельные гамильтонианы в $L_2(\mathbf{R}^3)$:

$$h_{\alpha\gamma} = -\Delta_{x_\gamma} + c_{\gamma\alpha}^{-2} v_\gamma(x_\gamma) \tag{4.6}$$

(при $\gamma = \alpha$ по определению полагаем $c_{\alpha\alpha} = 1$). Обозначим через $\sigma_a(h_{\alpha\gamma})$ дискретный спектр оператора $h_{\alpha\gamma}$. Нам потребуется следующее

Определение 3. Будем говорить, что в системе отсутствует случайное вырождение, если

$$c_{\beta\alpha}^{2}\sigma_d(h_{\alpha\beta}) \cap c_{\gamma\alpha}^{2}\sigma_d(h_{\alpha\gamma}) = \varnothing \quad \text{для всех } \beta \neq \gamma;\ \beta, \gamma = 1, 2, 3.$$

Под $c_{\beta\alpha}^2\sigma_d(h_{\alpha\beta})$ понимается множество точек вещественной оси, полученных из точек дискретного спектра оператора $h_{\alpha\beta}$ умножением на коэффициент $c_{\beta\alpha}^2$.

Имеет место следующая теорема, устанавливающая асимптотическое разбиение собственных функций дискретного спектра на серии, отвечающие связанным состояниям в подсистемах.

Теорема 4. *Если для всех* $\gamma = 1, 2, 3$

1) $v_\gamma \in L_2(\mathbf{R}^3)$;

2) $v_\gamma(x_\gamma)$ — *непрерывная функция при достаточно больших* $|x_\gamma|$;

3) *в системе отсутствует случайное вырождение,*

то имеет место асимптотическое разбиение собственных функций дискретного спектра операторов $L(y_\alpha)$ *на серии*:

$$\varphi_n(x_\alpha, y_\alpha) \xrightarrow[|y_\alpha| \to \infty]{L_2} \begin{cases} \psi_n^{(\alpha\gamma)} \\ 0 \end{cases},$$

для какого-либо $\gamma = 1, 2, 3$, *где* $\psi_n^{(\alpha\gamma)}$ — *собственная функция дискретного спектра оператора* $h_{\alpha\gamma}$.

Доказательство основано на переходе от реперного уравнения (4.3) к уравнениям типа Фаддеева и оценке L_2-норм правых частей этих уравнений.

Обозначим свободную резольвенту оператора Лапласа в $\mathbf{R}^3$ через $R_0(z) = (-\Delta_{x_\alpha} - z)^{-1}$, а ее ядро, соответственно,—

$$R_0(x_\alpha, x_\alpha', z) = \frac{\exp\{i\sqrt{z}\,|x_\alpha - x_\alpha'|\}}{4\pi\,|x_\alpha - x_\alpha'|}$$

и введем компоненты $Q_\gamma^n = -R_0(\varepsilon_n) v_\gamma \varphi_n$ решения реперного уравнения (4.3); $\varphi_n \in L_2(\mathbf{R}_{x_\alpha}^3)$. Тогда, очевидно, $\sum_\gamma Q_\gamma^n = \varphi_n$. Перепишем (4.3) в виде системы уравнений типа Фаддеева:

$$[-\Delta_{x_\alpha} + v_\gamma(x_\gamma) - \varepsilon_n]\, Q_\gamma^n = -v_\gamma \sum_{\beta \neq \gamma} Q_\beta^n \tag{4.7}$$

и будем оценивать L_2-норму правых частей этих уравнений при $|y_\alpha| \to \infty$.

Выделим в конфигурационном пространстве $\mathbf{R}^3_{x_\alpha}$ следующие области, зависящие от параметра y_α:

$$\omega_\alpha(y_\alpha) = \left\{ x_\alpha : |x_\alpha| \leqslant \frac{1}{4} \min_{\beta \neq \alpha} |s_{\beta\alpha} c_{\beta\alpha}^{-1} y_\alpha| \right\};$$

$$\omega_\beta(y_\alpha) = \left\{ x_\alpha : |x_\alpha + s_{\beta\alpha} c_{\beta\alpha}^{-1} y_\alpha| \leqslant \frac{1}{4} |s_{\beta\alpha} c_{\beta\alpha}^{-1} y_\alpha| \right\};$$

$$\hat{\omega}_\alpha(y_\alpha) = \mathbf{R}^3_{x_\alpha} \setminus \omega_\alpha(y_\alpha);$$

$$\hat{\omega}_\beta(y_\alpha) = \mathbf{R}^3_{x_\alpha} \setminus \omega_\alpha(y_\alpha).$$

Используя неравенство Гёльдера, можно получить оценку:

$$|R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 \leqslant \left| \int\limits_{\omega_\beta(y_\alpha)} R_0(x_\alpha, x'_\alpha, \varepsilon_n) v_\beta \varphi_n d^3 x'_\alpha \right|^2 +$$

$$+ \int\limits_{\hat{\omega}_\beta(y_\alpha)} |v_\beta(x'_\alpha, y_\alpha)|^2 d^3 x'_\alpha \int\limits_{\hat{\omega}_\beta(y_\alpha)} |R_0(x_\alpha, x'_\alpha, \varepsilon_n) \varphi_n(x'_\alpha, y_\alpha)|^2 d^3 x'_\alpha.$$

Поскольку $\varphi_n \in L_2$, а $R_0(\varepsilon_n)$ при $\varepsilon_n < 0$ существует и является огран ченным оператором, то $R_0(\varepsilon_n)\varphi_n \in L_2$ и второй сомножитель во втором слагаемом правой части последнего неравенства — ограниченная функция. Так как $v_\beta \in L_2$, то, по построению области $\hat{\omega}_\beta(y_\alpha)$, при $|y_\alpha| \to \infty$ первый сомножитель стремится к нулю. Таким образом, имеем

$$|R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 \leqslant \left(\left| \int\limits_{\omega_\beta(y_\alpha)} R_0(x_\alpha, x'_\alpha, \varepsilon_n) v_\beta \varphi_n d^3 x'_\alpha \right| + o(1) \right)^2. \tag{4.8}$$

Нам потребуется также некоторое уточнение этого неравенства. Именно, предположим, что $v_\beta(x_\beta) = O(|x_\beta|^{-3/2-\mu})$, $\mu > 0$, при $|x_\beta| \to \infty$. В таком случае справедлива асимптотика

$$\int\limits_{\hat{\omega}_\beta(y_\alpha)} |v_\beta(x'_\alpha, y_\alpha)|^2 d^3 x'_\alpha = O(|y_\alpha|^{-2\mu})$$

при $|y_\alpha| \to \infty$ и, следовательно, (4.8) можно уточнить:

$$|R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 \leqslant \left(\left| \int\limits_{\omega_\beta(y_\alpha)} R_0(x_\alpha, x'_\alpha, \varepsilon_n) v_\beta \varphi_n d^3 x'_\alpha \right| + O(|y_\alpha|^{-\mu}) \right)^2. \tag{4.8'}$$

Оценим теперь интеграл

$$\int\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma|^2 |R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 d^3 x_\alpha.$$

Функции φ_n, $v_\beta \in L_2$, следовательно, $R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n \in W_2^2 = \mathscr{D}(-\Delta_{x_\alpha} - \varepsilon_n)$ и, тем самым, $R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n \in C$. С другой стороны, по условиям леммы, при достаточно больших $|y_\alpha|$ на области $\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)$ потенциал v_γ является гладким: $v_\gamma \in C$. Следовательно, $\max\limits_{\hat{\omega}_\gamma} |v_\gamma| \, |R_0 v_\beta \varphi_n| < \infty$. Тогда, вновь пользуясь неравенством Гёльдера, имеем

$$\int\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma|^2 |R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 d^3 x_\alpha \leqslant \max_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma| \max_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n| \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma|^2 d^3 x_\alpha \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 d^3 x_\alpha \right)^{1/2}.$$

В последнем неравенстве $\max\limits_{\hat{\omega}_\gamma} | R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n | < \infty$, второй интегральный сомножитель ограничен, так как $R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n \in L_2$, первый интегральный сомножитель убывает при $| y_\alpha | \to \infty$, так как $v_\gamma \in L_2$. Поскольку $v_\gamma \in L_2$, то, по построению области $\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)$, $\max\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} | v_\gamma | \underset{|y_\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тем самым, при $| y_\alpha | \to \infty$ имеем

$$\int\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma|^2 |R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 d^3x_\alpha = o(1). \tag{4.9}$$

Вновь предполагая $v_\beta(x_\beta) = O(|x_\beta|^{-3/2-\mu})$, $\mu > 0$, при $|x_\beta| \to \infty$, уточним неравенство (4.9). В этом случае

$$\max\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma| = O(|y_\alpha|^{-3/2-\mu}) \quad \text{и} \quad \int\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma|^2 d^3x_\alpha = O(|y_\alpha|^{-2\mu}).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\hat{\omega}_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma|^2 |R_0(\varepsilon_n) v_\beta \varphi_n|^2 d^3x_\alpha = O(|y_\alpha|^{-3/2-2\mu}). \tag{4.9'}$$

Оценим норму $\| v_\gamma Q_\beta^n \|_{L_2}$. С учетом (4.8), (4.9) имеем

$$\| v_\gamma Q_\beta^n \|_{L_2}^2 \leqslant \int\limits_{\omega_\gamma(y_\alpha)} d^3x_\alpha |v_\gamma|^2 \Big(\Big| \int\limits_{\omega_\beta(y_\alpha)} d^3x'_\alpha \exp\{i\sqrt{\varepsilon_n} |x_\alpha - x'_\alpha|\} \times$$
$$\times (4\pi |x_\alpha - x'_\alpha|)^{-1} v_\beta(x'_\alpha, y_\alpha) \varphi_n(x'_\alpha, y_\alpha) \Big| + o(1)\Big)^2 + o(1). \tag{4.10}$$

Поскольку $\varepsilon_n \in \sigma_d(L(y_\alpha))$, то $\varepsilon_n < 0$ и, следовательно, $i\sqrt{\varepsilon_n} = -\sqrt{|\varepsilon_n|} < 0$. Далее, для $x_\alpha \in \omega_\gamma(y_\alpha)$, $x'_\alpha \in \omega_\beta(y_\alpha)$ справедлива оценка

$$|x_\alpha - x'_\alpha| \geqslant \frac{1}{2} \min_\beta |s_{\beta\alpha} c_{\beta\alpha}^{-1} y_\alpha|.$$

Обозначая $\tau \equiv \frac{1}{2} \min\limits_\beta | s_{\beta\alpha} c_{\beta\alpha}^{-1} | > 0$, перепишем (4.10) в виде

$$\| v_\gamma Q_\beta^n \|_{L_2}^2 \leqslant \frac{\exp\{-\tau \sqrt{|\varepsilon_n|}\, |y_\alpha|\}}{4\pi |y_\alpha|} \int\limits_{\omega_\gamma(y_\alpha)} |v_\gamma|^2 d^3x_\alpha \times$$
$$\times \Big(\int\limits_{\omega_\beta(y_\alpha)} |v_\beta|^2 d^3x'_\alpha \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\omega_\beta(y_\alpha)} |\varphi_n|^2 d^3x'_\alpha \Big)^{1/2} (1 + o(1)) + o(1).$$

Все три интегральных сомножителя в последнем неравенстве ограничены, поскольку v_γ, v_β, $\varphi_n \in L_2$. Кроме того, очевидно,

$$\frac{\exp\{-\tau\sqrt{|\varepsilon_n|}\, |y_\alpha|\}}{4\pi |y_\alpha|} = 0(|y_\alpha|^{-N}) \quad \forall N > 0.$$

Таким образом, $\| v_\gamma Q_\beta^n \|_{L_2} \to 0$ при $| y_\alpha | \to \infty$.

Уточним порядок этого убывания, предполагая при $|x_\beta| \to \infty$ $v_\beta(x_\beta) = O(|x_\beta|^{-3/2-\mu})$, $\mu > 0$. В этом случае для оценки нормы $\| v_\gamma Q_\beta^n \|_{L_2}$ можно использовать неравенство (4.9'), что дает

$$\| v_\gamma Q_\beta^n \|_{L_2} = O(|y_\alpha|^{-3/4-\mu}). \tag{4.11}$$

В силу (4.7) и доказанного убывания $\| v_\gamma Q_\beta^n \|_{L_2}$ при $| y_\alpha | \to \infty$:

$$\| (-\Delta_{x_\alpha} + V_\gamma(x_\gamma) - \varepsilon_n) Q_\gamma^n \|_{L_2} \xrightarrow[| y_\alpha | \to \infty]{} 0,$$

т. е. $Q_\gamma^n \xrightarrow[|y_\alpha| \to \infty]{L_2} \psi_n^{(\alpha\gamma)} \in \operatorname{Ker}(-\Delta_{x_\alpha} + v_\gamma(x_\gamma) - \varepsilon_n)$. Проведем замену переменных $x_\gamma = c_{\gamma\alpha} x_\alpha + s_{\gamma\alpha} y_\alpha$. Тогда $\Delta_{x_\alpha} = c_{\gamma\alpha}^2 \Delta_{x_\gamma}$ и последнее утверждение можно переписать в виде

$$Q_\gamma^n \xrightarrow[| y_\alpha | \to \infty]{L_2} \psi_n^{(\alpha\gamma)} \in \operatorname{Ker}(h_{\alpha\gamma} - c_{\gamma\alpha}^{-2} \varepsilon_n).$$

Если ядро оператора $h_{\alpha\gamma} - c_{\gamma\alpha}^{-2}\varepsilon_n$ состоит только из нуля, то $Q_\gamma^n \xrightarrow[|y_\alpha| \to \infty]{L_2} 0$; если это имеет место для всех $\gamma = 1, 2, 3$, то в пределе $| y_\alpha | \to \infty$ у реперного оператора $L(y_\alpha)$ нет собственного числа $\varepsilon_n(y_\alpha)$ (выход терма в непрерывный спектр). Если же $\psi_n^{(\alpha\gamma)} \neq 0$ как элемент пространства $L_2(\mathbf{R}^3)$, то $c_{\gamma\alpha}^{-2}\varepsilon_n \in \sigma_d(h_{\alpha\gamma})$ и $\psi_\gamma^{(\alpha\gamma)}$ — собственная функция дискретного спектра оператора $h_{\alpha\gamma}$. Если $\varepsilon_n \in c_{\gamma\alpha}^2 \sigma_d(h_{\alpha\gamma})$, то, в силу условия отсутствия случайного вырождения, $\varepsilon_n \notin c_{\beta\alpha}^2 \sigma_d(h_{\alpha\beta})$ $\forall \beta \neq \gamma$ и, следовательно, $Q_{\beta\neq\gamma}^n \xrightarrow[|y_\alpha| \to \infty]{L_2} 0$. Тем самым, $\varphi_n \xrightarrow[|y_\alpha| \to \infty]{L_2} \psi_n^{(\alpha\gamma)}$, что завершает доказательство теоремы.

Набор собственных функций $\{\psi_n^{(\alpha\alpha)}\}$ оператора $h_{\alpha\alpha}$ будем называть главной асимптотической серией собственных функций.

В дальнейшем нам потребуется следующий простой алгебраический факт. Пусть l — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве T, с невырожденным спектром $\sigma(l) = \{\varepsilon_j\}$. Пусть $g \in T$ — решение уравнения $(l - \varepsilon_0) g = \delta$, а ε_j — собственные числа оператора l, отвечающие собственным функциям g_j: $l g_j = \varepsilon_j g_j$. Тогда для скалярного произведения в T имеет место проверяемое непосредственно неравенство:

$$| \langle g, g_j \rangle_T | \leqslant | \varepsilon_j - \varepsilon_0 |^{-1} \| \delta \|_T .$$

Выбирая в качестве l оператор $l = h_\alpha$, пользуясь формулами (4.7), (4.11) в условиях $v_\gamma(x_\gamma) = O(| x_\gamma |^{-3/2-\mu})$, получаем

$$\langle \varphi_a, \psi_{m\neq a}^{(\alpha\gamma)} \rangle = O(| y_\alpha |^{-3/4-\mu}), \tag{4.12}$$

где $\psi_{m\neq a}^{(\alpha\gamma)}$ — собственная функция оператора $h_{\alpha\gamma}$, отличная от предела φ_a при $| y_\alpha | \to \infty$.

Изучим теперь асимптотическое поведение волновых функций непрерывного спектра реперного оператора $L(y_\alpha)$. Имеет место следующая лемма.

Л е м м а 7. *В условиях леммы* 6 *для волновых функций непрерывного спектра оператора* $L(y_\alpha)$ *справедливо следующее представление*:

$$\varphi_q(x_\alpha, y_\alpha) = \exp\{i(x_\alpha, q)\} + \sum_\beta Q_\beta^q(x_\alpha, y_\alpha), \tag{4.13}$$

где

$$\begin{gathered} Q_\alpha^q(x_\alpha, y_\alpha) \underset{| x_\alpha | \to \infty}{=} f_\alpha^q(\hat{x}_\alpha, y_\alpha) \exp\{i |q| |x_\alpha|\} |x_\alpha|^{-1} + O(|x_\alpha|^{-2}), \\ Q_\beta^q(x_\alpha, y_\alpha) \underset{| x_\beta | \to \infty}{=} f_\beta^q(\hat{x}_\beta, y_\alpha) \exp\{i |q| |x_\beta| / |c_{\beta\alpha}|\} |x_\beta|^{-1} + O(|x_\beta|^{-2}). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Здесь f_α^q, f_β^q — некоторые гладкие функции.

Доказательство. Перепишем реперное уравнение (4.3) в виде уравнения Липпмана—Швингера:

$$\varphi_q(x_\alpha, y_\alpha) = \exp\{i(x_\alpha, q)\} - \int d^3x'_\alpha \exp\{i|q||x_\alpha - x'_\alpha|\} \times \\ \times \sum_\beta v_\beta(x'_\beta)\varphi_q(x'_\alpha, y_\alpha)(4\pi|x_\alpha - x'_\alpha|)^{-1} \quad (4.15)$$

и выделим в правой части интегральные слагаемые

$$Q_\beta^q(x_\alpha, y_\alpha) = -\int d^3x'_\alpha \frac{\exp\{i|q||x_\alpha - x'_\alpha|\}}{4\pi|x_\alpha - x'_\alpha|} v_\beta(x'_\beta)\varphi_q(x'_\alpha, y_\alpha). \quad (4.16)$$

Быстрое убывание потенциалов v_β на бесконечности гарантирует сходимость возникающих ниже интегралов.

В интеграле (4.16) при $\beta = \alpha$ воспользуемся разложением функции $|x_\alpha - x'_\alpha|$ при $|x_\alpha| \to \infty$:

$$|x_\alpha - x'_\alpha| = |x_\alpha| - (\hat{x}_\alpha, x'_\alpha) + O(|x_\alpha|^{-1}). \quad (4.17)$$

В результате получим для $Q_\alpha^q(x_\alpha, y_\alpha)$ асимптотику (4.14), где

$$f_\alpha^q(\hat{x}_\alpha, y_\alpha) = -\int d^3x'_\alpha \exp\{-i|q|(\hat{x}_\alpha, x'_\alpha)\} v_\alpha\varphi_q / 4\pi. \quad (4.18)$$

В интегралах Q_β^q, $\beta \neq \alpha$, произведем замену переменных

$$x'_\alpha = c_{\beta\alpha}^{-1}x'_\beta - s_{\beta\alpha}c_{\beta\alpha}^{-1}y_\alpha$$

с якобианом, равным $|c_{\beta\alpha}|^{-3}$. Тогда для $Q_\beta^q(x_\alpha, y_\alpha)$ получим асимптотику (4.14), где

$$f_\beta^q(\hat{x}_\beta, y_\alpha) = -(|c_{\beta\alpha}|^2/4\pi)\int d^3x'_\beta\, v_\beta(x'_\beta) \exp\{-i|q|(\hat{x}_\beta, x'_\beta)/|c_{\beta\alpha}|\}\varphi_q(x'_\alpha, y_\alpha). \quad (4.19)$$

Из формул (4.15), (4.18), (4.19) непосредственно следует утверждение леммы.

§ 5. Координатные асимптотики волновых функций эффективной задачи

Для потенциалов, убывающих на бесконечности, асимптотическое поведение волновых функций, отвечающих процессам рассеяния $2 \to 2$, $2 \to 3$, хорошо известно [27]. Будем считать, что в начальном состоянии имеется связанная пара α в j_0-м состоянии, обозначаемая мультииндексом $A_0 = \{\alpha, j_0\}$, и свободная третья частица с относительным импульсом p_α, сопряженным приведенной якобиевой координате y_α. Через $B = \{\beta, j\}$ обозначим мультииндекс, отвечающий j-му связанному состоянию пары β с энергией связи $-\varkappa_B^2$ и собственной функцией $\psi_B(x_\beta)$. Полная энергия системы для рассматриваемых процессов равна $E = p_\alpha^2 - \varkappa_{A_0}^2$. Для потенциалов, убывающих быстрее кулоновского, волновая функция в этом случае имеет вид [27]:

$$\Psi_{A_0}(X, p_\alpha) = \exp\{i(p_\alpha, y_\alpha)\}\psi_{A_0}(x_\alpha) + \sum_B U_B + U_0. \quad (5.1)$$

Здесь

$$U_B(X, p_\alpha) \underset{|y_\beta|\to\infty}{=} F_B(\hat{y}_\beta, p_\alpha)\exp\{i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\,|y_\beta|\}\,|y_\beta|^{-1}\psi_B(x_\beta) + O(|y_\beta|^{-2}),$$

$$U_B(X, p_\alpha) \underset{|y_\gamma|\to\infty}{=} o(|y_\gamma|^{-N}) \quad \forall N > 0, \quad \gamma \neq \beta, \tag{5.2}$$

$$U_0(X, p_\alpha) \underset{|X|\to\infty}{=} F_0(\hat{X}, p_\alpha)\exp\{i\sqrt{E}\,|X|\}\,|X|^{-5/2} + O(|X|^{-7/2}),$$

где F_B, F_0 — амплитуды процессов $2 \to 2$ и $2 \to 3$ соответственно.

Пользуясь представлениями (4.1), (4.13), (5.1) и теоремой 4, можно, согласно формуле (2.12), вычислить асимптотики коэффициентов $\chi_a(y_\alpha)$. Определим эффективные амплитуды следующим образом:

$$\mathcal{A}_0(\hat{y}_\alpha, q, p_\alpha) = \sqrt{2\pi}\, e^{-i\pi/4} E^{-3/4}\,(2\pi \overline{F_0(\hat{X}_0, p_\alpha)} + |q| \int_{S_2} \overline{F_0(\hat{X}', p_\alpha)}\, f^q_{\alpha, as}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha)\, d^2\hat{x}_\alpha), \tag{5.3}$$

$$\mathcal{A}_B(\hat{y}_\alpha, q, p_\alpha) = |c_{\beta\alpha}|^{-2}\,\overline{F_B(-\hat{y}_\alpha, p_\alpha)} \int Q^q_{\beta, as}(x_\beta, \hat{y}_\alpha) \times \exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\, s_{\alpha\beta}(\hat{y}_\alpha, x_\beta)/|c_{\alpha\beta}|\}\,\overline{\psi_B(x_\beta)}\, d^3x_\beta, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{A}'_B(\hat{y}_\alpha, q, p_\alpha) = |c_{\beta\alpha}|^{-2}\,\overline{F_B(-\hat{y}_\alpha, p_\alpha)} \int d^3x_\beta \overline{\psi_\beta(x_\beta)} \times \exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\, s_{\alpha\beta}(\hat{y}_\alpha, x_\beta)/|c_{\alpha\beta}| + i(q, x_\beta)/c_{\beta\alpha}\}, \tag{5.5}$$

$$\mathcal{A}^{(n)}_B(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) = |c_{\beta\alpha}|^{-2}\,\overline{F_B(-\hat{y}_\alpha, p_\alpha)} \int d^3x_\beta \overline{\psi_B(x_\beta)} \times \psi^{(\alpha\beta)}_n(x_\beta)\exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\, s_{\alpha\beta}(\hat{y}_\alpha, x_\beta)/|c_{\alpha\beta}|\}, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{A}^{(n)}_A(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) = \delta_{jn}\overline{F_A(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)}, \quad A = \{\alpha, j\}. \tag{5.7}$$

Здесь использованы следующие обозначения для углов на пятимерной сфере: $S^5 \ni \hat{X} = \{x_\alpha, y_\alpha\}$,

$$\hat{X}_0 \equiv \{q/\sqrt{E}, \hat{y}_\alpha\sqrt{E-q^2}/\sqrt{E}\}, \quad \hat{X}' \equiv \{\hat{x}_\alpha|q|/\sqrt{E}, \hat{y}_\alpha\sqrt{E-q^2}/\sqrt{E}\},$$

и определены предельные функции:

$$f^q_{\alpha, as}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) = \lim_{|y_\alpha|\to\infty} f^q_\alpha(\hat{x}_\alpha, y_\alpha), \qquad Q^q_{\beta, as}(x_\beta, \hat{y}_\alpha) = \lim_{|y_\alpha|\to\infty} Q^q_\beta(x_\beta, y_\alpha).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *В условиях леммы 5 и теоремы 4 коэффициенты адиабатического разложения волновой функции $\Psi_{A_0}(X, p_\alpha)$ имеют следующее асимптотическое при $|y_\alpha| \to \infty$ поведение:*

$$\chi_n(y_\alpha, p_\alpha) = \delta_{nj_0}\exp\{-i(y_\alpha, p_\alpha)\} + \mathcal{A}^{(n)}_{\{\alpha, n\}}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)\exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_A^2}\,|y_\alpha|\}\,|y_\alpha|^{-1} + \sum_{B\neq A}\mathcal{A}^{(n)}_B(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)\exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\,|y_\alpha|/|c_{\alpha\beta}|\}\,|y_\alpha|^{-1} + O(|y_\alpha|^{-2}), \tag{5.8}$$

$$\chi_q(y_\alpha, p_\alpha) = \mathcal{A}_0(\hat{y}_\alpha, q, p_\alpha)\exp\{-i\sqrt{E-q^2}\,|y_\alpha|\}\,|y_\alpha|^{-1} + \sum_{B\neq A}(\mathcal{A}_B(\hat{y}_\alpha, q, p_\alpha) + \mathcal{A}'_B(\hat{y}_\alpha, q, p_\alpha)\exp\{-i(q, y_\alpha)\, s_{\beta\alpha}c^{-1}_{\beta\alpha}\}) \times \exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\,|y_\alpha|/|c_{\alpha\beta}|\}\,|y_\alpha|^{-1} + O(|y_\alpha|^{-2}). \tag{5.9}$$

Доказательство. Пользуясь представлениями (4.1), (4.13) и (5.1), для коэффициентов $\chi_n(y_\alpha)$ и $\chi_q(y_\alpha)$ получаем представления

$$\chi_n(y_\alpha, p_\alpha) = \langle \varphi_n, \Psi_{A_0}\rangle = \exp\{-i(p_\alpha, y_\alpha)\}\langle Q_\alpha^n, \psi_{A_0}\rangle + \\ + \exp\{-i(p_\alpha, y_\alpha)\}\sum_{\beta\neq\alpha}\langle Q_\beta^n, \psi_{A_0}\rangle + \sum_B \langle Q_\alpha^n, U_B\rangle + \\ + \sum_B\sum_{\gamma\neq\alpha}\langle Q_\gamma^n, U_B\rangle + \langle Q_\alpha^n, U_0\rangle + \sum_{\gamma\neq\alpha}\langle Q_\gamma^n, U_0\rangle, \tag{5.10}$$

$$\chi_q(y_\alpha, p_\alpha) = \langle \varphi_q, \Psi_{A_0}\rangle = \exp\{-i(p_\alpha, y_\alpha)\}\langle e^{i(x_\alpha, q)}, \psi_{A_0}\rangle + \\ + \sum_B \langle e^{i(x_\alpha, q)}, U_B\rangle + \langle e^{i(x_\alpha, q)}, U_0\rangle + \exp\{-i(y_\alpha, p_\alpha)\}\langle Q_\alpha^q, \psi_{A_0}\rangle + \\ + \exp\{-i(y_\alpha, p_\alpha)\}\sum_{\beta\neq\alpha}\langle Q_\beta^q, \psi_{A_0}\rangle + \sum_B\langle Q_\alpha^q, U_B\rangle + \\ + \sum_B\sum_{\gamma\neq\alpha}\langle Q_\gamma^q, U_B\rangle + \langle Q_\alpha^q, U_0\rangle + \sum_{\beta\neq\alpha}\langle Q_\beta^q, U_0\rangle. \tag{5.11}$$

Нам удобно ввести специальные обозначения для слагаемых в правых частях представлений (5.10), (5.11). Составим следующую таблицу (см. табл.): для каждой компоненты $Y(X, p_\alpha)$ волновой функции $\psi_{A_0}(X, p_\alpha)$ в представлении (5.1) и каждого слагаемого $Z_a(x_\alpha, y_\alpha)$ реперной функции $\varphi_a(x_\alpha, y_\alpha)$ в представлениях (4.1), (4.13) на пересечении соответствующего столбца и строки запишем скалярное произведение $\langle Z_a, Y\rangle = \int Z_a Y d^3x_\alpha$, которое будем обозначать буквой J с соответствующими индексами.

Таблица

Y (компоненты Ψ_{A_0})	Z_q слагаемые φ_q, $q^2 \in \sigma_c(L(y_2))$			Z_n слагаемые φ_n, $\varepsilon_n \in \sigma_d(L(y_\alpha))$	
	$e^{i(q, x_\alpha)}$	$Q_\alpha^q(x_\alpha, y_\alpha)$	$Q_\gamma^q(x_\alpha, y_\alpha)$, $\gamma\neq\alpha$	$Q_\alpha^n(x_\alpha, y_\alpha)$	$Q_\gamma^n(x_\alpha, y_\alpha)$, $x\neq\alpha$
$e^{i(p_\alpha, y_\alpha)} \times \psi_{A_0}(x_\alpha)$	$J_0^q e^{-i(p_\alpha, y_\alpha)}$	$J_\alpha^q e^{-i(p_\alpha, y_\alpha)}$	$J_\gamma^q e^{-i(p_\alpha, y_\alpha)}$	$J_\alpha^n e^{-i(p_\alpha, y_\alpha)}$	$J_\gamma^n e^{-i(p_\alpha, y_\alpha)}$
$U_A(X, p_\alpha)$	J_{A0}^q	$J_{A\alpha}^q$	$J_{A\gamma}^q$	$J_{A\alpha}^n$	$J_{A\gamma}^n$
$U_B(X, p_\alpha)$, $B\neq A$	J_{B0}^q	$J_{B\alpha}^q$	$J_{B\gamma}^q$	$J_{B\alpha}^n$	$J_{B\gamma}^n$
$U_0(X, p_\alpha)$	J_{00}^q	$J_{0\alpha}^q$	$J_{0\gamma}^q$	$J_{0\alpha}^n$	$J_{0\gamma}^n$

Исследуем асимптотическое поведение при $|y_\alpha| \to \infty$ каждого из слагаемых в правых частях представлений (5.10), (5.11), пользуясь асимптотиками (4.2), (4.14) и (5.2). Рассмотрим сначала асимптотики коэффициентов $\chi_n(y_\alpha, p_\alpha)$, отвечающих дискретному спектру реперного оператора $L(y_\alpha)$.

Асимптотика $J_\alpha^n(y_\alpha, p_\alpha) + \sum_{\gamma\neq\alpha} J_\gamma^n(y_\alpha, p_\alpha) = \langle\varphi_n, \psi_{A_0}\rangle$.

В условиях $v_\beta(x_\beta) = O(|x_\beta|^{-3-\nu})$, $\nu > 0$, для всех $\beta = 1, 2, 3$ эту асимптотику можно переписать в виде $v_\beta(x_\beta) = O(|x_\beta|^{-3/2-\mu})$, где $\mu > 3/2$. Тогда, пользуясь формулой (4.12), получаем

$$\langle\varphi_n, \psi_{m\neq n}^{(\alpha\beta)}\rangle = o(|y_\alpha|^{-9/4}). \tag{5.12}$$

Функция $\psi_{A_0}(x_\alpha)$, описывающая j_0-е связанное состояние пары α, является собственной функцией дискретного спектра оператора $h_{\alpha\alpha} = -\Delta_{x_\alpha} + v_\alpha$, т. е. одной из функций $\psi_n^{(\alpha\alpha)}$: $\psi_{A_0} \equiv \psi_{j_0}^{(\alpha\alpha)}$. Следовательно, используя соотношение (5.12), получаем:

$$\langle \varphi_n, \psi_{A_0} \rangle = \delta_{nj_0} + o(|y_\alpha|^{-9/4}). \tag{5.13}$$

Асимптотика $J_{A\alpha}^n(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\alpha^n, U_A \rangle$.

Согласно (4.2), (5.2), (5.12) и теореме 4 справедлива асимптотика

$$J_{A\alpha}^n = \langle Q_\alpha^n, U_A \rangle = \overline{F_A(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)} \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_A^2}\,|y_\alpha|\} \times$$
$$\times |y_\alpha|^{-1} \delta_{nj_0}(1 + O(|y_\alpha|^{-1})). \tag{5.14}$$

Асимптотики $J_{A\gamma}^n$ ($\gamma \neq \alpha$), $J_{B\alpha}^n$ ($B \neq A$), $J_{B\gamma}^n$ ($\gamma \neq \beta$, $B \neq A$).

Согласно теореме 4 при $|y_\alpha| \to \infty$ имеет место асимптотика

$$Q_\gamma^n \xrightarrow[|y_\alpha| \to \infty]{L_2} \begin{cases} \psi_n^{(\alpha\gamma)} \\ 0 \end{cases}.$$

Пользуясь формулами (4.2), (5.2), (5.14), получаем

$$J_{A\gamma}^n = \langle Q_\gamma^n, U_A \rangle = \overline{F_A(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)} \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_A^2}\,|y_\alpha|\} \times$$
$$\times |y_\alpha|^{-1} \langle \psi_n^{(\alpha\gamma)}, \psi_A \rangle (1 + O(|y_\alpha|^{-1})).$$

Поскольку функция $\psi_A(x_\alpha)$ локализована в области малых $|x_\alpha|$, а функция $\psi_n^{(\alpha\gamma)}$ (при $\gamma \neq \alpha$) — в области малых $|x_\gamma|$, то их скалярное произведение в $L_2(\mathbf{R}_{x_\alpha}^3)$ экспоненциально убывает при $|y_\alpha| \to \infty$. Следовательно, для $J_{A\gamma}^n$ также имеем экспоненциальное убывание:

$$J_{A\gamma}^n(y_\alpha, p_\alpha) = o(|y_\alpha|^{-N}) \quad \forall N > 0. \tag{5.15}$$

Аналогично (5.15) имеем

$$J_{B\alpha}^n(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\alpha^n, U_B \rangle = o(|y_\alpha|^{-N}) \quad \forall N > 0, \tag{5.16}$$

$$J_{B\gamma}^n(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\gamma^n, U_B \rangle = o(|y_\alpha|^{-N}) \quad \forall N > 0, \ \gamma \neq \beta. \tag{5.17}$$

Асиптотика $J_{B\beta}^n(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\beta^n, U_B \rangle$, $B = \{\beta, j\}$, $B \neq A$.

При $|y_\alpha| \to \infty$, согласно теореме 4, Q_β^n стремится по норме к функции $\psi_n^{(\alpha\beta)}(x_\beta)$, которая локализована в области малых $|x_\beta|$. При ограниченном $|x_\beta|$ и $|y_\alpha| \to \infty$ очевидно $|y_\beta| \to \infty$ и для U_B можно вос, пользоваться асимптотикой (5.2):

$$J_{B\beta}^n = \int \overline{F_B(\hat{y}_\beta, p_\alpha)}\, \overline{\psi_B(x_\beta)} \times$$
$$\times \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\,|y_\beta|\}\,|y_\beta|^{-1} \psi_n^{(\alpha\beta)}(x_\beta)\, d^3x_\beta + O(|y_\beta|^{-2}).$$

Поскольку $y_\alpha = -s_{\alpha\beta}x_\beta + c_{\alpha\beta}y_\beta$, то при ограниченном $|x_\beta|$ и $|y_\alpha| \to \infty$ имеем

$$|y_\beta| = |c_{\alpha\beta}|^{-1}(|y_\alpha| + s_{\alpha\beta}(x_\beta, \hat{y}_\alpha)) + O(|y_\alpha|^{-1}), \tag{5.18}$$
$$\hat{y}_\beta = y_\beta |y_\beta|^{-1} = -\hat{y}_\alpha + O(|y_\alpha|^{-1}).$$

С учетом (5.18) получаем

$$J_{B\beta}^n(y_\alpha, p_\alpha) = |c_{\alpha\beta}|^{-2} \overline{F_B(-\hat{y}_\alpha, p_\alpha)} \int \overline{\psi_B(x_\beta)}\, \psi_n^{(\alpha\beta)}(x_\beta) \times$$
$$\times \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\, s_{\alpha\beta}(x_\beta, \hat{y}_\alpha)/|c_{\alpha\beta}|\}\, d^3x_\beta \times$$
$$\times \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\,|y_\alpha|/|c_{\alpha\beta}|\}\,|y_\alpha|^{-1} + O(|y_\alpha|^{-2}). \tag{5.19}$$

А с и м п т о т и к а $J_{0\alpha}^{n}(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\alpha^n, U_0\rangle$.

Согласно теореме 4 при $|y_\alpha| \to \infty$ компонента Q_α^n стремится к функции $\psi_n^{(\alpha\alpha)}(x_\alpha)$, локализованной в области малых $|x_\alpha|$. В этой области при $|y_\alpha| \to \infty$ для гиперрадиуса справедлива оценка

$$|X| = (|x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2)^{1/2} = |y_\alpha|(1 + o(1))$$

и, следовательно,

$$J_{0\alpha}^{n}(y_\alpha, p_\alpha) = \exp\{-i\sqrt{E}\,|y_\alpha|\}\,|y_\alpha|^{-5/2}\times$$
$$\times \int \overline{F_0(\hat{X}, p_\alpha)}\,\psi_n^{(\alpha\alpha)}(x_\alpha)\,d^3x_\alpha = O(|y_\alpha|^{-5/2}), \tag{5.20}$$

где $\hat{X} = X\,|X|^{-1} = \{0, \hat{y}_\alpha\}$.

А с и м п т о т и к а $J_{0\gamma}^{n}(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\gamma^n, U_0\rangle$, $\gamma \neq \alpha$.

Согласно теореме 4 при $|y_\alpha| \to \infty$ компонента Q_γ^n стремится к функции $\psi_n^{(\alpha\gamma)}$, локализованной в области малых $|x_\gamma|$. Поскольку $x_\gamma = c_{\gamma\alpha}x_\alpha + s_{\gamma\alpha}y_\alpha$, то в этой области при $|y_\alpha| \to \infty$ имеем

$$|x_\alpha| = |s_{\gamma\alpha}c_{\gamma\alpha}^{-1}|\,(|y_\alpha| - s_{\gamma\alpha}^{-1}(\hat{y}_\alpha, x_\gamma)) + O(|y_\alpha|^{-1}). \tag{5.21}$$

Тогда

$$|X| = |c_{\gamma\alpha}|^{-1}\,|y_\alpha| - \operatorname{sign}(s_{\gamma\alpha})\,(\hat{y}_\alpha, x_\beta) + O(|y_\alpha|^{-1}). \tag{5.22}$$

Отсюда получаем

$$J_{0\gamma}^{n}(y_\alpha, p_\alpha) = O(|y_\alpha|^{-5/2}). \tag{5.23}$$

Суммируя информацию, содержащуюся в формулах (5.10), (5.13)—(5.17), (5.19), (5.20) и (5.23), получаем асимптотику (5.8) для коэффициента $\chi_n(y_\alpha, p_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$.

Исследуем теперь асимптотическое поведение функций $\chi_q(y_\alpha)$, отвечающих непрерывному спектру ($q^2 > 0$) реперного оператора $L(y_\alpha)$. Для этого изучим асимптотики слагаемых в правой части представления (5.13).

А с и м п т о т и к а $\mathcal{J}_0^q(y_\alpha, p_\alpha) + \mathcal{J}_\alpha^q(y_\alpha, p_\alpha) + \sum\limits_{\gamma\neq\alpha}\mathcal{J}_\gamma^q(y_\alpha, p_\alpha) = \langle\varphi_q, \psi_{A_0}\rangle$.

В условиях леммы 6 $v_\gamma(x_\gamma) = O(|x_\gamma|^{-3/2-\mu})$, $\mu > 3/2$. Тогда, пользуясь формулой (4.12) для $a = q$, получаем, аналогично (5.15):

$$\langle\varphi_q, \psi_A\rangle = o(|y_\alpha|^{-9/4}) \tag{5.24}$$

для всех $A = \{\alpha, j\}$, в том числе и для $A_0 = \{\alpha, j_0\}$.

А с и м п т о т и к а $J_{B0}^{q}(y_\alpha, p_\alpha) = \langle e^{i(q, x_\alpha)}, U_B\rangle$, $B \neq A$.

Функции $\psi_\beta(x_\beta)$ локализованы в области малого $|x_\beta|$, в этой области при $|y_\alpha| \to \infty$ имеем $|y_\beta| \to \infty$ и, следовательно, можно пользоваться асимптотикой (5.2) для U_B. В этих условиях имеем

$$J_{B0}^{q} = \langle e^{i(q, x_\alpha)}, U_B\rangle = \int \overline{F_B(\hat{y}_\beta, p_\alpha)}\,\overline{\psi_B(x_\beta)}\times$$
$$\times \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\,|y_\beta|\}\,|y_\beta|^{-1}\,e^{i(q, x_\alpha)}\,d^3x_\alpha + O(|y_\beta|^{-1}).$$

В рассматриваемой области справедливы представления (5.18), что вместе с представлением $x_\alpha = c_{\beta\alpha}^{-1}x_\beta - s_{\beta\alpha}c_{\beta\alpha}^{-1}y_\alpha$, $d^3x_\alpha = |c_{\beta\alpha}|^{-3}\,d^3x_\beta$ дает

$$J_{B0}^{q}(y_\alpha, p_\alpha) = \overline{F_B(-\hat{y}_\alpha, p_\alpha)}\,|c_{\alpha\beta}|^{-2}\int \overline{\psi_B(x_\beta)}\exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\times$$
$$\times s_{\alpha\beta}\,|c_{\alpha\beta}|^{-1}(x_\beta, \hat{y}_\alpha) + i(q, x_\beta)\,c_{\beta\alpha}^{-1}\}\,d^3x_\beta \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa_B^2}\times$$
$$\times |y_\alpha|\,|c_{\alpha\beta}|^{-1}\}\,|y_\alpha|^{-1}\exp\{-is_{\beta\alpha}c_{\beta\alpha}^{-1}(q, y_\alpha)\} + O(|y_\alpha|^{-2}). \tag{5.25}$$

Асимптотики $J^q_{B\alpha}(y_\alpha, p_\alpha)$ $(B \neq A)$, $J^q_{B\gamma}(B \neq A,\ \beta \neq \gamma)$.

Аналогично предыдущему случаю можно воспользоваться асимптотикой (5.2) для U_B при $|y_\beta| \to \infty$. Кроме того, в области ограниченных $|x_\beta|$ при $|y_\alpha| \to \infty$ имеем $|x_\alpha| \to \infty$ и, следовательно, можно пользоваться асимптотикой (4.14) для Q^q_α. Поскольку $x_\beta = c_{\beta\alpha}x_\alpha + s_{\beta\alpha}y_\alpha$, то в рассматриваемой области

$$|x_\alpha| = |s_{\beta\alpha}c_{\beta\alpha}^{-1}|\,|y_\alpha| - \operatorname{sign}(s_{\beta\alpha})\,|c_{\beta\alpha}|^{-1}(\hat{y}_\alpha, x_\beta) + O(|y_\alpha|^{-1}. \tag{5.26}$$

В результате имеем

$$J_{B\alpha}(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q^q_\alpha, U_B\rangle = O(|y_\alpha|^{-2}). \tag{5.27}$$

В области ограниченных $|x_\beta|$ при $|y_\alpha| \to \infty$ имеем: $|x_\gamma| \to \infty$, $|y_\beta| \to \infty$. В результате, аналогично (5.27), получим

$$J^q_{B\gamma}(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q^q_\alpha, U_B\rangle = O(|y_\alpha|^{-2}). \tag{5.28}$$

Асимптотика $J^q_{B\beta}(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q^q_\beta, U_B\rangle$, $B = \{\beta, j\}$, $B \neq A$.

В рассматриваемой области $|y_\beta| \to \infty$, однако $|x_\beta|$ ограничен и, следовательно, компонента Q^q_β не дает дополнительного убывания по $|y_\alpha|$. В этих условиях

$$\begin{aligned} J^q_{B\beta}(y_\alpha, p_\alpha) = \overline{F_B(-\hat{y}_\alpha, p_\alpha)}\,|c_{\beta\alpha}|^{-2}\int \overline{\psi_B(x_\beta)}\,Q^q_{\beta,\,as}(x_\beta, \hat{y}_\alpha)\times \\ \times \exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\,s_{\alpha\beta}\,|c_{\alpha\beta}|^{-1}(\hat{y}_\alpha, x_\beta)\}\,d^3x_\beta \times \\ \times \exp\{-i\sqrt{E+\varkappa_B^2}\,|y_\alpha|\,|c_{\alpha\beta}|^{-1}\}\,|y_\alpha|^{-1} + O(|y_\alpha|^{-2}). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Формулы (5.25)—(5.29) описывают с точностью до $O(|y_\alpha|^{-1})$ вклад процессов перестройки в асимптотику коэффициентов $\chi_q(y_\alpha, p_\alpha)$. Исследуем теперь вклад в асимптотику процессов развала, описываемых слагаемым $U_0(X, p_\alpha)$ в представлении (5.1) для трехтельной волновой функции Ψ_{A_0}.

Асимптотика $J^q_{00}(y_\alpha, p_\alpha) = \langle e^{i(q,x_\alpha)}, U_0\rangle$.

Воспользуемся для U_0 асимптотикой (5.2) и введем замену переменных $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha|y_\alpha|^{-1}$. Тогда $|X| = |y_\alpha|\sqrt{1+|\tilde{x}_\alpha|^2}$, $d^3x_\alpha = |y_\alpha|^3 d^3\tilde{x}_\alpha$ и

$$\begin{aligned} J^q_{00}(y_\alpha, p_\alpha) = |y_\alpha|^{-1/2}\int \overline{F_0(\hat{X}, p_\alpha)}\exp\{i\,|y_\alpha|[(q, \tilde{x}_\alpha) - \\ - \sqrt{E}\sqrt{1+|\tilde{x}_\alpha|^2}]\}\,(1+|\tilde{x}_\alpha|^2)^{-5/4}\,d^3\tilde{x}_\alpha\,(1 + O(|y_\alpha|^{-1})). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Для вычисления старшего члена асимптотики интеграла в правой части (5.30) воспользуемся методом стационарной фазы [33]. Рассматриваемый интеграл имеет вид

$$\int_{\mathbf{R}^3} \Phi(\tilde{x}_\alpha)\exp\{i\,|y_\alpha|\,f(\tilde{x}_\alpha)\}\,d^3\tilde{x}_\alpha,$$

где $f(\tilde{x}_\alpha) = (q, \tilde{x}_\alpha) - \sqrt{E}\sqrt{1+|\tilde{x}_\alpha|^2}$, а точка стационарной фазы совпадает с

$$\tilde{x}_{\alpha 0} = q(1-q^2)^{-1/2}.$$

Следовательно, методом стационарной фазы получим:

$$\begin{aligned} \int \Phi(\tilde{x}_\alpha)\exp\{i\,|y_\alpha|\,f(\tilde{x}_\alpha)\}\,d^3\tilde{x}_\alpha = (2\pi)^{3/2}|y_\alpha|^{-3/2}\times \\ \times \exp\{i\,|y_\alpha|\,f(\tilde{x}_{\alpha 0}) + i\pi\operatorname{sign}\mathfrak{T}/4\}\,|\mathfrak{T}|^{-1/2}(1 + O(|y_\alpha|^{-1})), \end{aligned} \tag{5.31}$$

где через $\mathfrak{T}$ обозначен гессиан — определитель матрицы вторых производных, $\mathfrak{T}_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}_\alpha^i \partial \tilde{x}_\alpha^j}$, вычисленный в точке $\tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_{\alpha 0}$. Непосредственным вычислением находим:

$$\mathfrak{T} = -E^{-1}(E - q^2)^{5/2}. \tag{5.32}$$

Для $E > q^2 > 0$, очевидно, справедливо неравенство $\mathfrak{T} < 0$.

В точке стационарной фазы $\tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_{\alpha 0}$:

$$X = \{x_\alpha, y_\alpha\} = \{|\,y_\alpha\,|\,\tilde{x}_{\alpha 0}, y_\alpha\} = \{q\,|\,y_\alpha\,|\,(E - q^2)^{-1/2},\ |\,y_\alpha\,|\,\hat{y}_\alpha\},$$

$$|\,X\,| = |\,y_\alpha\,|\sqrt{1 + |\,\tilde{x}_{\alpha 0}\,|^2} = |\,y_\alpha\,|\sqrt{E}\,(E - q^2)^{-1/2},$$

и, следовательно,

$$\hat{X} = X\,|\,X\,|^{-1} = \hat{X}_0 = \{q/\sqrt{E}, \hat{y}_\alpha\sqrt{E - q^2}/\sqrt{E}\}.$$

В результате получаем

$$J_{00}^q(y_\alpha, p_\alpha) = (2\pi)^{-3/2} e^{-i\pi/4} E^{-3/4}\overline{F_0(\hat{X}_0, p_\alpha)} \times$$
$$\times \exp\{-i\sqrt{E - q^2}\,|\,y_\alpha\,|\}\,|\,y_\alpha\,|^{-1} + O(|\,y_\alpha\,|^{-2}). \tag{5.33}$$

А с и м п т о т и к а $J_{0\alpha}^q(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\alpha^q, U_0\rangle$.

Вновь используем асимптотику (5.2) и замену $\tilde{x}_\alpha = x_\alpha\,|\,y_\alpha\,|^{-1}$:

$$J_{0\alpha}^q = |\,y_\alpha\,|^{1/2}\int \overline{F_0(\hat{X}, p_\alpha)} \exp\{-i\sqrt{E}\,|\,y_\alpha\,|\sqrt{1 + |\,\tilde{x}_\alpha\,|^2}\} \times$$
$$\times (1 + |\,\tilde{x}_\alpha\,|^2)^{-5/4} Q_\alpha^q(\tilde{x}_\alpha\,|\,y_\alpha\,|, \hat{y}_\alpha\,|\,y_\alpha\,|)\, d^3\tilde{x}_\alpha\,(1 + O(|\,y_\alpha\,|^{-1})).$$

Разобьем пространство интегрирования на две части:

$$\mathbf{R}_{\tilde{x}_\alpha}^3 = K(|\,y_\alpha\,|) \cup \mathbf{R}_{\tilde{x}_\alpha}^3 \setminus K(|\,y_\alpha\,|),$$

где шар $K(|\,y_\alpha\,|) = \{\tilde{x}_\alpha\colon\ |\,\tilde{x}_\alpha\,| < c\,|\,y_\alpha\,|^{-1}\}$, а константа c выбрана такой, что при $|\,x_\alpha\,| > c$ имеет место асимптотика (4.14) для Q_α^q. Подынтегральная функция ограничена, следовательно, при $|\,y_\alpha\,| \to \infty$ интеграл по области $K(|\,y_\alpha\,|)$ убывает не медленнее объема шара $K(|\,y_\alpha\,|)$, т. е. как $O(|\,y_\alpha\,|^{-3})$. Поэтому можно пренебречь этим интегралом и всюду заменить компоненту Q_α^q ее асимптотикой (4.14), справедливой в области $\mathbf{R}_{\tilde{x}_\alpha}^3 \setminus K(|\,y_\alpha\,|)$. В результате получим

$$J_{0\alpha}^q = |\,y_\alpha\,|^{-1/2}\int_{S^2} d^2\hat{x}_\alpha \int_0^\infty dr\,r^2\,\overline{F_0(\hat{X}, p_\alpha)}\, f_{\alpha,\,as}^q(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha) \times$$
$$\times r^{-1}(1 + r^2)^{-5/4}\exp\{i\,|\,y_\alpha\,|\,(|\,q\,|\,r - \sqrt{E}\sqrt{1 + r^2})\}\,(1 + O(|\,y_\alpha\,|^{-1})), \tag{5.34}$$

где использовано обозначение $r = |\,\tilde{x}_\alpha\,|$. Асимптотика интеграла по мере dr вычисляется с помощью метода стационарной фазы. В результате имеем

$$J_{0\alpha}^q(y_\alpha, p_\alpha) = (2\pi)^{1/2} E^{-3/4}\,|\,q\,|\,e^{-i\pi/4}\int_{S^2}\overline{F_0(\hat{X}', p_\alpha)} \times$$
$$\times f_{\alpha,\,as}^q(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha)\, d^2\hat{x}_\alpha \exp\{-i\sqrt{E - q^2}\,|\,y_\alpha\,|\}\,|\,y_\alpha\,|^{-1} + O(|\,y_\alpha\,|^{-2}). \tag{5.35}$$

А с и м п т о т и к а $J_{0\gamma}^q(y_\alpha, p_\alpha) = \langle Q_\gamma^q, U_0\rangle$, $\gamma \neq \alpha$.

Пользуясь формулой $x_\gamma = c_{\gamma\alpha}x_\alpha + s_{\gamma\alpha}y_\alpha$ и проводя замену $\tilde{x}_\gamma = x_\gamma\,|\,y_\alpha\,|^{-1}$, представим $|\,X\,|$ в виде $|\,X\,| = |\,y_\alpha\,|\,(1 + c_{\gamma\alpha}^{-2}\,|\,\tilde{x}_\gamma - s_{\gamma\alpha}\hat{y}_\alpha\,|^2)^{1/2}$. Аналогично рассмотренному выше случаю, разобьем пространство $\mathbf{R}^3_{\tilde{x}_\gamma}$ на области $\mathbf{R}^3_{\tilde{x}_\gamma} = K(|y_\alpha|) \cup \mathbf{R}^3 \setminus K(|y_\alpha|)$ и пренебрежем интегралом по $K(|y_\alpha|)$, убывающим как $O(|y_\alpha|^{-3})$ при $|y_\alpha| \to \infty$. В области $\mathbf{R}^3_{\tilde{x}_\gamma} \setminus K(|y_\alpha|)$ справедлива асимптотика (4.14) для Q^q_γ. Пользуясь этой асимптотикой, получим

$$J^q_{0\gamma} = |c_{\gamma\alpha}|^{-3} |y_\alpha|^{-1/2} \int \overline{F_0(\tilde{X}, p_\alpha)} f^q_{\gamma,\, as}(\hat{x}_\gamma, \hat{y}_\alpha) |\tilde{x}_\gamma|^{-1} \times$$
$$\times (1 + c^{-2}_{\gamma\alpha} |\tilde{x}_\gamma - s_{\gamma\alpha}\hat{y}_\alpha|^2)^{-5/4} \exp\{i |y_\alpha| (|\tilde{x}_\gamma| |q| c^{-1}_{\gamma\alpha} -$$
$$- \sqrt{E}(1 + c^{-2}_{\gamma\alpha} |\tilde{x}_\gamma - s_{\gamma\alpha}\hat{y}_\alpha|^2)^{1/2})\} d^3\tilde{x}_\gamma (1 + O(|y_\alpha|^{-1})). \tag{5.36}$$

Асимптотика интеграла в правой части (5.36) вычисляется с помощью метода стационарной фазы. В результате получим

$$J^q_{0\gamma}(y_\alpha, p_\alpha) = O(|y_\alpha|^{-2}). \tag{5.37}$$

Подставляя (5.24), (5.25), (5.27)—(5.29), (5.33), (5.35), (5.37) в представление (5.11), получаем асимптотику (5.9) для коэффициентов $\chi_q(y_\alpha, p_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что при вычислении вклада функции $U_0(X, p_\alpha)$, описывающей процесс развала, в асимптотику коэффициентов $\chi_q(y_\alpha, p_\alpha)$ точка стационарной фазы существует лишь при $E \geqslant q^2$. Следовательно, при фиксированной энергии $E = E_0$ слагаемые $\langle \varphi_q, U_0 \rangle$ с $q^2 > E_0$ экспоненциально убывают при $|y_\alpha| \to \infty$ и вклада в асимптотику соответствующих коэффициентов χ_q не дают.

§ 6. Трехчастичная матрица рассеяния и эффективные амплитуды

В предыдущем параграфе были построены асимптотики функций $\chi_a(y_a, p_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$ и получено представление эффективных амплитуд в терминах трехчастичных амплитуд процессов $2 \to (2, 3)$. Более содержательным является, однако, обратное представление, позволяющее определить отвечающие этим процессам компоненты трехчастичной матрицы рассеяния по эффективным амплитудам задачи (2.11). Такое представление дается следующей теоремой.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 компоненты трехчастичной S-матрицы, отвечающие процессам рассеяния $2 \to (2, 3)$, выражаются в терминах эффективных амплитуд следующим образом:*

$$S_{AA_0}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) = \delta_{jj_0}\delta(\hat{y}_\alpha - \hat{p}_\alpha) + 2i(2\pi)^{-5/2}\rho_{A_0}(E)\rho_A(E)\overline{\mathcal{A}^{(j)}_A(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)}, \tag{6.1}$$

где $A = \{\alpha, j\}$, $A_0 = \{\alpha, j_0\}$, $\rho_B(E) = ((E + \varkappa^2_B)/2)^{1/2}$,*— для упругого и неупругого каналов,*

$$S_{BA_0}(\hat{y}_\beta, p_\alpha) = 2i(2\pi)^{-5/2}\rho_{A_0}(E)\rho_B(E) c^{-1}_{\beta\alpha} \times$$
$$\times \int d^3x_\beta \psi_\beta(x_\beta) \exp\{-i\sqrt{E + \varkappa^2_B}(x_\beta, \hat{y}_\beta) s_{\beta\alpha}\} \times$$
$$\times \Big(\sum_n \overline{\mathcal{A}^{(n)}_B(\hat{y}_\beta, p_\alpha)} \psi^{(\alpha\beta)}_n(x_\beta) + \int d^3q\, (\overline{\mathcal{A}'_B(-\hat{y}_\beta, q, p_\alpha)} \times$$
$$\times \exp\{i(q, x_\beta) c^{-1}_{\beta\alpha}\} + \overline{\mathcal{A}_B(-\hat{y}_\beta, q, p_\alpha)}\, Q^q_{\beta,\, as}(x_\beta, \hat{y}_\beta))\Big), \tag{6.2}$$

— *для каналов перестройки* $(B \neq A)$,

$$S_{0A_0}(\hat{X}, p_\alpha) = 2(2\pi)^{-2}\rho_{A_0}(E)\rho_0(E)e^{-i\pi/4}(2\pi(1+\tau_\alpha^2)^{-1/2}\mathscr{A}_0(\hat{y}_\alpha, \zeta_\alpha\sqrt{E}\,\hat{x}_\alpha, p_\alpha) +$$

$$+\sqrt{E}\int_{S^2}\mathscr{A}_0(\hat{y}_\alpha, \zeta\sqrt{E}\,\hat{q}, p_\alpha) f_{\alpha,\,as}^{\zeta_\alpha\sqrt{E}\hat{q}}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha)\,d^2\hat{q})(1+\tau_\alpha^2)^{-1/2} \tag{6.3}$$

— *для канала трехчастичного развала, где* $\rho_0(E) = \sqrt{E/2}$, $\tau_\alpha = |x_\alpha||y_\alpha|^{-1}$, $\zeta_\alpha = \tau_\alpha(1+\tau_\alpha^2)^{-1/2}$.

Доказательство. Представим сначала амплитуды развала F_0, перестройки F_B, а также упругого F_{A_0} и неупругого F_A, $A \neq A_0$, рассеяния в терминах эффективных амплитуд, определяемых формулами (5.3)—(5.7). Согласно теореме 1 волновая функция $\psi_{A_0}(X, p_\alpha)$, отвечающая процессам рассеяния $2 \to (2, 3)$, а также ее компоненты $e^{i(p_\alpha, y_\alpha)}\psi_{A_0}$, U_B, U_0 лежат в пространстве $\hat{\mathfrak{H}}$ и потому для них справедливо адиабатическое разложение по базису $\{\varphi_a\}$, в котором коэффициенты разложения вычисляются как скалярное произведение данной компоненты и базисной функции в гильбертовом слое $L_2(\mathbf{R}^3_{x_\alpha})$. Будем пользоваться обозначениями таблицы. Асимптотики при $|y_\alpha| \to \infty$ каждой из приведенных в таблице функций с точностью до $O(|y_\alpha|^{-1})$ были вычислены в ходе доказательства теоремы 5. С помощью этих асимптотик, а также асимптотик (5.2) для компонент трехчастичной волновой функции Ψ_{A_0}, выразим соответствующие трехчастичные амплитуды через эффективные амплитуды.

Амплитуда развала $F_0(\hat{X}, p_\alpha)$.

Пользуясь представлениями (4.1), (4.13) и обозначениями таблицы, запишем компоненту $\overline{U_0}$, описывающую процесс трехчастичного развала, в виде

$$\overline{U_0(X, p_\alpha)} = \sum_a\!\!\!\!\!\!\int\langle\varphi_a, U_0\rangle\overline{\varphi_a} = \sum_n\Big(\sum_\gamma J^n_{0\gamma}\sum_\beta\overline{Q^n_\beta} +$$

$$+\int d^3q\Big(J^q_{00} + \sum_\gamma J^q_{0\gamma}\Big)\Big(e^{-i(q,\,x_\alpha)} + \sum_\beta\overline{Q^q_\beta}\Big)\Big). \tag{6.4}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение слагаемых в правой части (6.4) при $|X| \to \infty$ в области Ω_0 трехчастичного развала [27], где все частицы далеки друг от друга.

Дискретный спектр реперного оператора дает экспоненциально малый вклад в асимптотику U_0, поскольку в области Ω_0 при $|X| \to \infty$ имеем $|x_\beta| \to \infty$ и, следовательно,

$$Q^n_\beta \sim \exp\{-\sqrt{|\varepsilon_n|}\,|x_\beta|\}\,|x_\beta|^{-1} = o(|x_\beta|^{-N}) \quad \forall N > 0.$$

Вклад слагаемых, содержащих $J^q_{0\gamma}$, $\gamma \neq \alpha$, имеет порядок малости $O(|X|^{-7/2})$, так как $J^q_{0\gamma} \sim |X|^{-2}$, а дополнительное убывание как $|X|^{-3/2}$ есть следствие метода стационарной фазы при интегрировании по мере d^3q. Тем самым, вклад порядка $O(|X|^{-5/2})$ дают лишь слагаемые

$$\int d^3q\,(J^q_{0\alpha} + J^q_{00})(e^{-i(q,\,x_\alpha)} + \overline{Q^q_\alpha}) \tag{6.5}$$

и

$$\int d^3q\,(J^q_{0\alpha} + J^q_{00})\,\overline{Q^q_\gamma}, \quad \gamma \neq \alpha. \tag{6.6}$$

Можно убедиться, что последний интеграл имеет в Ω_0 при $|X| \to \infty$ асимптотику вида

$$\int d^3q\,(J^q_{0\alpha} + J^q_{00})\,\overline{Q^q_\gamma} =$$
$$= K_{\alpha\gamma} \exp\{-i\tau_\gamma (1+\tau_\gamma^2)^{-1/2} c^{-1}_{\alpha\gamma} \sqrt{E}\,|X|\}\,|X|^{-5/2} + O(|X|^{-7/2}), \qquad (6.7)$$

где $\tau_\gamma = |x_\gamma|\,|y_\gamma|^{-1}$. Зная асимптотику (5.2) для U_0, отсюда заключаем, что $K_{\alpha\gamma} = 0$ и весь вклад в асимптотику $\overline{U_0}$ дается интегралом (6.6).

Вычислим сначала асимптотику интеграла

$$\int d^3q\,(J^q_{0\alpha} + J^q_{00})\, e^{-i(q,\,x_\alpha)},$$

пользуясь формулами (5.30) и (5.37). Обозначая $\tau_\alpha = |x_\alpha|\,|y_\alpha|^{-1}$, $\zeta_\alpha = \tau_\alpha (1+\tau_\alpha^2)^{-1/2}$, запишем $|x_\alpha| = \zeta_\alpha |X|$, $|y_\alpha| = \zeta_\alpha |X|\,\tau_\alpha^{-1}$. Точка стационарной фазы совпадает с

$$q_0 = \zeta_\alpha \sqrt{E}\hat{x}_\alpha.$$

Тогда, пользуясь методом стационарной фазы в $\mathbf{R}^3$, найдем

$$\int d^3q\,(J^q_{0\alpha} + J^q_{00})\, e^{-i(q,\,x_\alpha)} = (2\pi)^{3/2}(1+\tau_\alpha^2)^{-1} E^{3/4} e^{i\pi/4} \times$$
$$\times \mathcal{A}_0(\hat{y}_\alpha, \zeta_\alpha \sqrt{E}\,\hat{x}_\alpha, p_\alpha) \exp\{-i\sqrt{E}\,|X|\}\,|X|^{-5/2} + O(|X|^{-7/2}). \qquad (6.8)$$

Для изучения асимптотики второго слагаемого в интеграле (6.5) воспользуемся формулами (5.30), (5.35), (4.14) и одномерным методом стационарной фазы. Точка стационарной фазы совпадает с $|q| = \zeta_\alpha \sqrt{E}$ и, следовательно, в старшем порядке

$$\int d^3q\,(J^q_{0\alpha} + J^q_{00})\,\overline{Q^q_\alpha} = \sqrt{2\pi}\,(1+\tau_\alpha^2)^{-1/2} E^{3/4} e^{i\pi/4} \exp\{-i\sqrt{E}\,|X|\}\,|X|^{-5/2} \times$$
$$\times \int_{S^2} \mathcal{A}_0(\hat{y}_\alpha, \zeta_\alpha \sqrt{E}\,\hat{q}, p_\alpha)\, \overline{f^{\zeta_\alpha \sqrt{E}\hat{q}}_{\alpha,\,as}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha)}\, d^2\hat{q} + O(|X|^{-7/2}). \qquad (6.9)$$

Сравнивая асимптотики (5.2), (6.8), (6.9) и учитывая (6.7), получаем следующее соотношение:

$$F_0(\hat{X}, p_\alpha) = \sqrt{2\pi}\,(1+\tau_\alpha^2)^{-1/2} E^{3/4} e^{-i\pi/4} \Big(2\pi (1+\tau_\alpha^2)^{-1/2}\, \overline{\mathcal{A}_0(\hat{y}_\alpha, \zeta_\alpha \sqrt{E}\,\hat{x}_\alpha, p_\alpha)} +$$
$$+ E^{1/2} \int_{S^2} \overline{\mathcal{A}_0(\hat{y}_\alpha, \zeta_\alpha \sqrt{E}\,\hat{q}, p_\alpha)}\, f^{\zeta_\alpha \sqrt{E}\hat{q}}_{\alpha,\,as}(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha)\, d^2\hat{q}\Big). \qquad (6.10)$$

Амплитуды перестройки $F_B(\hat{y}_\beta, p_\alpha)$, $B \neq A$.

Пользуясь обозначениями таблицы, домножая компоненты $\overline{U_B}$ на соответствующие собственные функции парной подсистемы $\psi_B(x_\beta)$ и интегрируя по мере d^3x_β, будем иметь

$$\int \overline{U_B}\psi_B d^3x_\beta = \sum_n \int d^3x_\beta \sum_\gamma J^n_{B\gamma} \sum_\alpha \overline{Q^n_\alpha}\psi_B(x_\beta) +$$
$$+ \int d^3q \int d^3x_\alpha \Big(J^q_{B0} + \sum_\gamma J^q_{B\gamma}\Big)\Big(e^{-i(q,\,x_\alpha)} + \sum_\alpha \overline{Q^q_\alpha}\Big)\psi_B(x_\beta). \qquad (6.11)$$

Построим асимптотику правой части равенства (6.18) в парной области Ω_β [27] при $|y_\beta| \to \infty$. Компоненты Q^n_γ, $\gamma \neq \beta$, экспоненциально убывают в этой области и потому слагаемые, содержащие Q^n_γ или $J^n_{B\gamma} = \langle Q^n_\gamma, U_B\rangle$, не дают вклада в асимптотику.

Таким образом, существенный вклад от дискретного спектра реперных операторов в асимптотику $\overline{U_B}$ дают только слагаемые вида

$$\int \psi_B J^n_{B\beta} \overline{Q^n_\beta} d^3 x_\beta.$$

В области Ω_β при $|y_\beta| \to \infty$ справедливо представление

$$\begin{gathered} |y_\alpha| = |c_{\alpha\beta}|\,|y_\beta| - c_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}(\hat{y}_\beta, x_\beta) + O(|y_\beta|^{-1}), \\ \hat{y}_\alpha = y_\alpha |y_\alpha|^{-1} = -\hat{y}_\beta + O(|y_\beta|^{-1}). \end{gathered} \tag{6.12}$$

Пользуясь асимптотикой (5.19) и формулами (6.12) и (4.2), находим

$$\begin{gathered} \int \psi_B(x_\beta)\, J^n_{B\beta}(y_\alpha, p_\alpha)\, Q^n_\beta(y_\beta, x_\beta)\, d^3 x_\beta = \mathcal{A}^{(n)}_B(-\hat{y}_\beta, p_\alpha) \times \\ \times |c_{\alpha\beta}|^{-1} \int \psi_B(x_\beta)\, \overline{\psi^{(\alpha\beta)}_n}(x_\beta) \exp\{-i s_{\alpha\beta} \sqrt{E + \varkappa_B^2}(\hat{y}_\beta, x_\beta)\}\, d^3 x_\beta \times \\ \times \exp\{-i \sqrt{E + \varkappa_B^2}\, |y_\beta|\}\, |y_\beta|^{-1}(1 + O(|y_\beta|^{-1})). \end{gathered} \tag{6.13}$$

Можно показать, что слагаемые в правой части (6.11), содержащие $J^q_{B\gamma}$ или $\overline{Q^q_\gamma}$ $(\gamma \neq \beta)$, убывают в Ω_β при $|y_\beta| \to \infty$ как $O(|y_\beta|^{-2})$ и, следовательно, не дают вклада в старший член асимптотики. Тем самым, такой вклад от непрерывного спектра реперных операторов могут вносить только члены $(J^q_{B\beta} + J^q_{B0})(e^{-i(q,\, x_\alpha)} + \overline{Q^q_\beta})$. Вычисляя методом стационарной фазы асимптотики интегралов

$$\int J^q_{B\beta}{}^{-i(q,\, x_\alpha)}\, d^3 q, \qquad \int J^q_{B0} \overline{Q^q_\beta} d^3 q,$$

можно убедиться, что они убывают в Ω_β при $|y_\beta| \to \infty$ как $O(|y_\beta|^{-2})$. Следовательно, остается изучить в том же пределе поведение члена $J^q_{B\beta}\overline{Q^q_\beta}$ и $J^q_{B0} e^{-i(q,\, x_\alpha)}$. Из асимптотик (5.29), (5.33) находим соответственно:

$$\begin{gathered} \int J^q_{B0} e^{-i(q,\, x_\alpha)} \psi_\beta(x_\beta)\, d^3 x_\beta = \mathcal{A}'_B(\hat{y}_\beta, q, p_\alpha)\, |c_{\alpha\beta}|^{-1} \exp\{-i \sqrt{E + \varkappa_B^2}\, |y_\beta|\}\, |y_\beta|^{-1} \times \\ \times \int \exp\{-i c^{-1}_{\beta\alpha}(q, x_\beta) - i \sqrt{E + \varkappa_B^2}\, s_{\alpha\beta}(\hat{y}_\beta, x_\beta)\}\, \psi_B(x_\beta)\, d^3 x_\beta + O(|y_\beta|^{-2}), \end{gathered} \tag{6.14}$$

$$\begin{gathered} \int J^q_{B\beta} \overline{Q^q_\beta} \psi_B(x_\beta)\, d^3 x_\beta = \mathcal{A}_B(\hat{y}_\beta, q, p_\alpha)\, |c_{\alpha\beta}|^{-1} \exp\{-i \sqrt{E + \varkappa_B^2}\, |y_\beta|\}\, |y_\beta|^{-1} \times \\ \times \int \exp\{-i \sqrt{E + \varkappa_B^2}\, s_{\alpha\beta}(\hat{y}_\beta, x_\beta)\}\, \overline{Q^q_{\beta,\, as}} \psi_B(x_\beta)\, d^3 x_\beta + O(|y_\beta|^{-2}). \end{gathered} \tag{6.15}$$

Суммируя информацию, содержащуюся в формулах (5.2), (6.11), (6.13)—(6.15), окончательно будем иметь

$$\begin{gathered} F_B(\hat{y}_\beta, p_\alpha) = |c_{\beta\alpha}|^{-1} \int d^3 x_\beta \overline{\psi_B(x_\beta)} \exp\{-i \sqrt{E + \varkappa_B^2}\, s_{\alpha\beta}(\hat{y}_\beta, x_\beta)\} \times \\ \times \Big(\sum_n \overline{\mathcal{A}^{(n)}_B(-\hat{y}_\beta, p_\alpha)}\, \psi^{(\alpha\beta)}_n(x_\beta) + \\ + \int d^3 q \,(\overline{\mathcal{A}_B(\hat{y}_\beta, q, p_\alpha)}\, Q^q_{\beta,\, as}(x_\beta, \hat{y}_\beta) + \overline{\mathcal{A}'_B(\hat{y}_\beta, q, p_\alpha)} \exp\{i(q, x_\beta)\, c^{-1}_{\beta\alpha}\})\Big). \end{gathered} \tag{6.16}$$

А м п л и т у д ы $F_A(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)$ к а н а л о в у п р у г о г о и н е у п р у г о г о р а с с е я н и я.

Представим функцию $\overline{U}_A$ в виде

$$\overline{U_A(y_\alpha, p_\alpha)} = \sum_a \int \langle \varphi_a, U_A \rangle \overline{\varphi_a} \tag{6.17}$$

и рассмотрим асимптотику обеих частей (6.17) при $|y_\alpha| \to \infty$ в области Ω_α. Пользуясь формулами (5.2), (5.8), (5.13) и (5.24), находим

$$F_A(\hat{y}_\alpha, p_\alpha) = \overline{\mathcal{A}_A^{(j)}(\hat{y}_\alpha, p_\alpha)}, \quad A = \{\alpha, j\}. \tag{6.18}$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, воспользуемся формулами, связывающими амплитуды процессов $2 \to (2, 3)$ в системе трех тел с соответствующими компонентами матрицы рассеяния [34]:

$$F_{BA_0}(\hat{y}_\beta, p_\alpha) = i(2\pi)^{5/2}(2\rho_B(E)\rho_{A_0}(E))^{-1}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{jj_0}\delta(\hat{y}_\alpha - \hat{p}_\alpha) - S_{BA_0}(\hat{y}_\beta, p_\alpha)), \tag{6.19}$$

$$F_{0A_0}(\hat{X}, p_\alpha) = (2\pi)^{5/2}E^{3/4}(2\rho_{A_0}(E)\rho_0(E))^{-1}S_{0A_0}(\hat{X}, p_\alpha). \tag{6.20}$$

Суммируя информацию, содержащуюся в формулах (6,10), (6.16), (6.19)—(6.20), получаем соотношения (6.1)—(6.3).

§ 7. Асимптотики индуцированных калибровочных полей

Изучим поведение «дискретной» части калибровочного поля $A(y_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$. Нам понадобится следующий простой алгебраический факт. Пусть l — самосопряженный оператор с невырожденным спектром, действующий в гильбертовом пространстве T. Пусть $g, g_0 \in T$ — решения уравнений

$$(l - \varepsilon_0)g = \delta, \quad \delta \in T, \quad (l - \varepsilon_0)g_0 = 0$$

соответственно. Тогда для произвольного элемента $t \in T$ справедливо представление скалярного произведения:

$$\langle g, t\rangle_T = \langle g_0, t\rangle_T + \tau, \tag{7.1}$$

где $|\tau| \leqslant \text{Const}\,\|t\|_T\,\|\delta\|_T$. Доказательство этого представления основано на существовании ограниченного оператора $(l - \varepsilon_0)^{-1}|_{T^\perp}$ на подпространстве $T^\perp = T \ominus \{g_0\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 8. *В условиях леммы 6 и теоремы 4 имеют место следующие асимптотики компонент $A_{mn}(y_\alpha)$ калибровочного поля при $|y_\alpha| \to \infty$:*

1) *Если собственные функции дискретного спектра реперного оператора φ_m, φ_n принадлежат различным асимптотическим сериям, описываемым теоремой 4, то*

$$A_{mn}(y_\alpha) = O(|y_\alpha|^{-9/4}); \tag{7.2}$$

2) *Если функция φ_n принадлежит главной асимптотической серии, т. е. $\varphi_n \xrightarrow[|y_\alpha|\to\infty]{} \psi_n^{(\alpha\alpha)}$, то справедлива асимптотика* (7.2);

3) *Если φ_m, φ_n принадлежат одной асимптотической серии, отличной от главной, то $A_{mn}(y_\alpha)$, вообще говоря, не убывают при $|y_\alpha| \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях леммы 6 и теоремы 4, для всех $\gamma = 1, 2, 3$ $v_\gamma(x_\gamma) = O(|x_\gamma|^{-3/2-\mu})$, $\mu > 3/2$, при $|x_\beta| \to \infty$. Тогда, пользуясь формулами (4.7), (4.11), (4.12) и представлением (7.1) для оператора $l = h_{\alpha\gamma}$, получим для произвольной функции $\Phi(x_\alpha) \in L_2(\mathbf{R}^3)$:

$$\langle\varphi_m, \Phi\rangle = \langle\psi_m^{(\alpha\gamma)}, \Phi\rangle + O(|y_\alpha|^{-9/4}). \tag{7.3}$$

Предполагая $\partial_\mu \varphi_n \in L_2(\mathbf{R}^3)$, пользуясь формулой (7.3) для $\Phi = \partial_\mu \varphi_n$ и определением (2.10), находим:

$$A^{\mu}_{mn}(y_\alpha) = \langle \psi_m^{(\alpha\gamma)}, \partial_\mu \varphi_n \rangle + O(|y_\alpha|^{-9/4}).$$

Из соотношения

$$\langle \psi_m^{(\alpha\gamma)}, \partial_\mu \varphi_n \rangle = \partial_\mu \langle \psi_m^{(\alpha\gamma)}, \varphi_n \rangle - \langle \partial_\mu \psi_m^{(\alpha\gamma)}, \varphi_n \rangle$$

с использованием (7.3) для $\Phi = \partial_\mu \psi_m^{(\alpha\gamma)}$ следует

$$A^{\mu}_{mn}(y_\alpha) = \langle \psi_m^{(\alpha\gamma)}, \partial_\mu \psi_n^{(\alpha\beta)} \rangle + O(|y_\alpha|^{-9/4}). \tag{7.4}$$

Далее,

$$\partial_\mu \psi_n^{(\alpha\beta)} = \frac{\partial}{\partial y^\mu_\alpha} \psi_n^{(\alpha\beta)}(x_\beta) = s_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu_\beta} \psi_n^{(\alpha\beta)}(x_\beta). \tag{7.5}$$

Поскольку $\psi_m^{(\alpha\gamma)}$ локализована в области малых $|x_\gamma|$, а $\psi_n^{(\alpha\beta)}$ — в области малых $|x_\beta|$, из представления (7.4) сразу получаем утверждения 1) и 3) леммы. Утверждение 2) получается с учетом (7.5), поскольку, по определению $s_{\alpha\alpha} = 0$.

Отметим, что если в системе отсутствует перестройка и развал, т. е. возможно лишь упругое и неупругое рассеяние, то лемма 8 гарантирует асимптотическое убывание калибровочного поля $A(y_\alpha)$ при $|y_\alpha| \to \infty$ порядка $O(|y_\alpha|^{-9/4})$.

III. Калибровочные поля адиабатических представлений с одномерной базой

§ 8. Система трех одномерных бозонов

В настоящем и последующих параграфах рассматриваются модельные ситуации, в которых одна из задач метода адиабатических представлений — реперная задача — является явно решаемой. Тем самым, в этих задачах можно явно построить репер $\{\varphi_a\}$, вычислить оператор связности A и исследовать асимптотику элементов A_{mn} при $m, n \to \infty$.

В настоящем параграфе рассматривается квантовая система трех безспиновых частиц с дельта-образным взаимодействием интенсивности $g \in \mathbf{R}$ во всех парах [17], [35]—[37]. Волновую функцию системы будем считать симметричной относительно перестановок частиц, моделируя статистику системы трех бозонов спина нуль. В системе центра масс задача рассеяния для таких частиц эквивалентна [36], [37] задаче рассеяния акустических волн в секторе $\Phi \subset \mathbf{R}^2$

$$\Phi = \{\{r, \theta\}: r \in \mathbf{R}_+, -\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/6\}.$$

В полярных координатах $\{r, \theta\}$ гамильтониан системы действует в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbf{R}_+ \times [-\pi/6, \pi/6], r\,dr\,d\theta)$ и может быть представлен в виде

$$H = -\partial_r^2 - r^{-1}\partial_r - r^{-2}\partial_\theta^2. \tag{8.1}$$

Оператор H самосопряжен на области определения

$$\mathscr{D}(H) = W_2^2(\Phi, dr\,d\theta) \cap \{u: \partial_\theta u|_{\theta=\pm\pi/6} = \mp rgu|_{\theta=\pm\pi/6}, u|_{r=0} < \infty\}.$$

Условие $u|_{r=0} < \infty$ эквивалентно отсутствию в системе трехчастичных сил [37].

Удобно использовать стандартную замену переменных

$$v(r, \theta) = r^{1/2} u(r, \theta), \tag{8.2}$$

приводящую к спектральной задаче

$$\left(-\partial_r^2 \otimes I + \int_0^\infty \oplus L(r)\, dr\right) v = Ev, \tag{8.3}$$

где реперные операторы

$$L(r) = -r^{-1}\partial_\theta^2 - (4r^2)^{-1} \tag{8.4}$$

самосопряжены на областях определения

$$\mathscr{D}(L(r)) = W_2^2[-\pi/6, \pi/6] \cap \{f\colon \partial_\theta f|_{\theta=\pm\pi/6} = \mp rgf|_{\theta=\pm\pi/6}\}$$

в пространстве $\mathscr{F}_r = L_2[-\pi/6, \pi/6]$. Спектральная задача (8.3) эквивалентна исходной задаче.

$$Hu = Eu. \tag{8.5}$$

Спектр реперных операторов $L(r)$ является чисто дискретным, а их собственные функции $\varphi_n(\theta, r)$,

$$L(r)\varphi_n(\theta, r) = \varepsilon_n(r)\varphi_n(\theta, r), \tag{8.6}$$

образуют ортонормированный базис (подвижный репер) в $\mathscr{F}_r$. Это позволяет представить решение задачи (8.5) в виде адиабатического разложения

$$u(r, \theta) = r^{-1/2} \sum_n \overline{\chi_n(r)}\, \varphi_n(\theta, r), \tag{8.7}$$

где

$$\chi_n(r) = \langle \varphi_n, v\rangle = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \varphi_n \bar{v}\, d\theta. \tag{8.8}$$

Спектральная задача (8.6) для реперного оператора $L(r)$ допускает явное решение. Поведение термов

$$\varepsilon_n(r) = r^{-2}(k_n^2(r) - 1/4) \tag{8.9}$$

таково, что при всех r термы не пересекаются.

Мы рассмотрим случай $g > 0$, отвечающий дельта-функциональному отталкиванию в парных подсистемах и исключающий существование двух- и трехтельных связанных состояний. В этом случае существуют две серии решений реперной задачи (8.6). Одна из них имеет вид

$$\varphi_{2n}(\theta, r) = w_{2n}(r)\cos(k_{2n}(r)\theta), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8.10}$$

где w_{2n} — нормировочные коэффициенты:

$$w_{2n}(r) = (\pi/6 + \sin(\pi k_{2n}(r)/3)/k_{2n}(r))^{-1/2},$$

а $k_{2n}(r)$ — решения уравнения

$$k_{2n}(r) = rg \operatorname{ctg}(\pi k_{2n}(r)/6). \tag{8.11}$$

Другая серия определяется формулой

$$\varphi_{2n+1}(\theta, r) = w_{2n+1}(r)\sin(k_{2n+1}(r)\theta), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{8.12}$$

где w_{2n+1} — нормировочные коэффициенты

$$w_{2n+1}(r) = (\pi/6 - \sin(\pi k_{2n+1}(r)/3)/k_{2n+1}(r))^{-1/2},$$

а $k_{2n+1}(r)$ — решения уравнения

$$k_{2n+1}(r) = -rg\,\mathrm{tg}\,(\pi k_{2n+1}(r)/6). \tag{8.13}$$

Следуя общей схеме метода адиабатических разложений (см. раздел 1), подставим разложение (8.7) в уравнение (8.3) и спроецируем результат на $\varphi_m(\theta, r)$ в $\mathcal{F}_r$. В силу полноты и ортогональности набора $\{\varphi_n\}$ в результате получим эффективное уравнение

$$[-(\partial_r \otimes I + A)^2 + \Lambda(r)]\,\chi = E\chi \tag{8.14}$$

в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}_+, l_2^+)$, где

$$\Lambda(r) = \mathrm{diag}\,\{\varepsilon_m(r)\}.$$

Оператор связности A действует в пространстве $\mathcal{H}$ как оператор умножения на операторнозначную функцию $A(r)$:

$$A = I_r \otimes A(r),$$

где I_r — единичный оператор в $L_2(\mathbf{R}_+)$, а операторы $A(r)$, действующие в l_2^+, определяются матричными элементами

$$A_{nm}(r) = \langle \varphi_n, \partial_r \varphi_m \rangle_{\mathcal{F}_r}. \tag{8.15}$$

Величины $A_{nm}(r)$ могут быть явно вычислены, например,

$$\begin{gathered}A_{2n2m}(r) = -w_{2n}w_{2n}\partial_r k_{2m}\Big(\frac{\mathrm{II}}{6}(k_{2n} - k_{2m})^{-1}(\cos(\pi(k_{2n} - k_{2m})/6) - 1\Big) - \\ -(k_{2n} + k_{2m})^{-1}\cos(\pi(k_{2n} + k_{2m})/6)) + (k_{2n} + k_{2m})^{-2}(\sin(\pi(k_{2n} + k_{2m})/6) - \\ -\pi(k_{2n} + k_{2m})/6) - (k_{2n} - k_{2m})^{-2}(\sin(\pi(k_{2n} - k_{2m})/6) - \pi(k_{2n} - k_{2m})/6)).\end{gathered} \tag{8.16}$$

Анализируя соотношения (8.10)—(8.16), можно получить следующие асимптотики элементов $A_{nm}(r)$:

$$\begin{gathered}A_{nm}(r) = O(m^{-2}), \quad m \to \infty, \\ A_{nm}(r) = O(n^{-1}), \quad n \to \infty, \\ A_{nm}(r) = O(m^{-2}n^{-1}), \quad n, m \to \infty.\end{gathered}$$

Эти асимптотики обеспечивают сходимость ряда $\sum\limits_{n,m} |A_{nm}|^2 < \infty$ для всех $r \in \mathbf{R}_+$. Следовательно, оператор $A(r)$ является оператором Гильберта — Шмидта в пространстве l_2^+ для всех $r \in \mathbf{R}_+$.

Поставим задачу рассеяния для эффективного оператора

$$\hat{H} = -(\partial_r \otimes I + A)^2 + \Lambda(r), \tag{8.17}$$

действующего в пространстве $\mathcal{H}$. Для этого рассмотрим асимптотический эффективный оператор

$$\hat{H}_0 = -(\partial_r \otimes I + I_r \otimes A_\infty)^2 + I_r \otimes \Lambda_\infty,$$

где $A_\infty = \lim\limits_{r\to\infty} A(r)$, $\Lambda_\infty = \lim\limits_{r\to\infty} \Lambda(r)$. Из соотношений (8.10)—(8.16) следует, что

$$\begin{gathered}A_{mn}(r) = c_{mn}r^{-2} + O(r^{-3}), \quad r \to \infty, \\ \Lambda_{mn}(r) = \delta_{mn}\varepsilon_n(r) = O(r^{-2}), \quad r \to \infty.\end{gathered}$$

Тем самым пределы A_∞ и Λ_∞ существуют и равны нулю. Следовательно, асимптотический эффективный оператор имеет вид

$$\widehat{H}_0 = -\partial_r^2 \otimes I. \tag{8.18}$$

Рассмотрим оператор $\widehat{H}_0$, заданный на области определения

$$\mathscr{D}(\hat{H}_0) = W_2^2(\mathbf{R}_+, l_2^+) \cap \{\chi : \chi|_{r=0} = 0\}$$

в качестве невозмущенного оператора. Его собственные функции $\chi^{as}(r, E)$ имеют вид

$$\chi^{as}(r, E) = (e^{-i\sqrt{E}r} - e^{i\sqrt{E}r}) J,$$

где J — произвольный элемент $J \in l_2^+$. Решения эффективной спектральной задачи (8.14) для возмущенного оператора $\widehat{H}$ асимптотически при $r \to \infty$ представимы в виде:

$$\chi(r, E) \sim e^{-i\sqrt{E}r} J_{\text{inc}} - e^{i\sqrt{E}r} J_{\text{out}}. \tag{8.19}$$

Определим эффективную матрицу рассеяния $S^{\text{eff}}(E)$ для пары операторов $\widehat{H}_0$, $\widehat{H}$ и произвольного $J_{\text{inc}} \in l_2^+$ следующим образом:

$$J_{\text{out}} = S^{\text{eff}} J_{\text{inc}}. \tag{8.20}$$

Эффективная S-матрица, определяемая соотношениями (8.19), (8.20), является оператором в пространстве b_2^+:

$$S^{\text{eff}}(E) = \{S_{mn}^{\text{eff}}(E)\}_{m,\, n=0}^{\infty}.$$

Получим соотношение, связывающее $S^{\text{eff}}(E)$ и полную S-матрицу исходной задачи в секторе Ф. В случае $g > 0$ (отталкивание) полная S-матрица имеет единственный нетривиальный блок S^0, отвечающий процессу $3 \to 3$. Его можно определить как оператор, переводящий амплитуду при сходящейся сферической волне в $\mathbf{R}^2$ в амплитуду при расходящейся сферической волне. Именно, решение $u(r, \theta)$ задачи (8.4) имеет при $r \to \infty$ следующую асимптотику;

$$u(r, \theta, E) \sim r^{-1/2} e^{-i\sqrt{E}r}\, \Xi_{\text{inc}}(\theta) + r^{-1/2} e^{i\sqrt{E}r}\, \Xi_{\text{out}}(-\theta). \tag{8.21}$$

Назовем оператор

$$S^0 \colon \Xi_{\text{inc}}(\theta) \mapsto \Xi_{\text{out}}(\theta)$$

с ядром $\mathscr{S}^0(\theta, \theta', E)$ матрицей рассеяния для процесса $3 \to 3$ в секторе Ф.

Используя адиабатическое представление (8.7), асимптотику (8.19) и определение (8.20), можно получить следующее асимптотическое представление для функции $u(r, \theta, E)$ при $r \to \infty$:

$$u(r, \theta, E) \sim r^{-1/2} e^{-i\sqrt{E}r} \sum_m J_m \varphi_m^\infty(\theta) - r^{-1/2} e^{i\sqrt{E}r} \sum_m \varphi_m^\infty(\theta) \sum_n S_{mn}^{\text{eff}}(E)\, J_n, \tag{8.22}$$

где J_m — компоненты вектора J_{inc}, а под $\varphi_m^\infty(\theta)$ понимаются пределы (в среднем в L_2)

$$\varphi_m^\infty = \lim_{r\to\infty} \varphi_m(r, \theta).$$

Легко убедиться, что

$$\varphi_{2m}^\infty(\theta) = \sqrt{6/\pi}\cos(3(2m+1)\theta), \quad \varphi_{2m+1}^\infty(\theta) = \sqrt{6/\pi}\sin(6(m+1)\theta).$$

Сравнивая асимптотики (8.21), (8.22) и используя ортогональность функций φ_m, получим следующие соотношения:

$$\mathcal{S}^0(\theta, \theta', E) = -\sum_m \sum_n S_{mn}^{\text{eff}}(E)\, \varphi_m^\infty(-\theta)\, \varphi_n^\infty(\theta'), \tag{8.23}$$

$$S_{mn}^{\text{eff}}(E) = -\int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\theta \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\theta' \mathcal{S}^0(-\theta, \theta', E)\, \varphi_m^\infty(\theta)\, \varphi_n^\infty(\theta'). \tag{8.24}$$

Соотношения (8.23) и (8.24) реализуют связь между операторами H и $\hat{H}$ в терминах матриц рассеяния. Они являются аналогами соотношений (5.3)—(5.7) и (6.1)—(6.3), полученных для системы трех трехмерных частиц с быстроубывающим взаимодействием общего вида.

В рамках рассматриваемой модели можно, однако, наполнить более детальной информацией соотношения (8.23), (8.24) и получить точное выражение для эффективной матрицы рассеяния $S^{\text{eff}}(E)$. Именно, в работе [37] было получено следующее точное выражение для ядра $\mathcal{S}^0(\theta, \theta', E)$:

$$\mathcal{S}_0(\theta, \theta', E) = B(\pi/3 - \theta, E)\, B(\theta, E)\, B(\pi/3 + \theta, E)\, \delta(\theta - \theta'), \tag{8.25}$$

где

$$B(\alpha, E) = (i\sqrt{E} \cos \alpha + g)\, (i\sqrt{E} \cos \alpha - g)^{-1}. \tag{8.26}$$

Отсюда, используя (8.24), получаем

$$S_{mn}^{\text{eff}}(E) = -\int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\theta B(\pi/3 - \theta, E)\, B(\theta, E)\, B(\pi/3 + \theta, E)\, \varphi_m^\infty(\theta)\, \varphi_n^\infty(-\theta). \tag{8.27}$$

§ 9. Искривленный квантовый волновод

В настоящем параграфе рассматривается пример применения метода адиабатических представлений к квантовомеханической волноводной задаче. Мы исследуем систему, динамика которой задается уравнением Шрёдингера в криволинейной плоской полосе Ω фиксированной ширины d с некоторыми самосопряженными граничными условиями, изменяющимися вдоль полосы. Такая система может служить моделью распространения электронов в пленках или наноэлектронных электрических цепях. Будем называть такие системы искривленными квантовыми волноводами [38], [39].

Обозначим через $\partial\Omega = \partial\Omega_- \bigcup \partial\Omega_+$ стенки волновода и будем полагать $\partial\Omega_-$ и $\partial\Omega_+$ идентичными, т. е. граничные условия на $\partial\Omega_-$ и $\partial\Omega_+$ — совпадающими. Тогда процесс распространения электрона в волноводе описывается следующей краевой задачей в Ω:

$$\begin{cases} -\Delta\Psi = E\Psi, \\ \partial_n \Psi\,|_{\partial\Omega_\pm} = \gamma(s)\, \Psi\,|_{\partial\Omega_\pm}, \quad \gamma(s) \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{9.1}$$

Здесь через ∂_n обозначена производная по внутренней нормали к $\partial\Omega$.

Введем локальные координаты (ν, s), ассоциированные с полосой Ω. Переход к локальным координатам (ν, s) порождает следующую метрику в $\mathbf{R}^2$:

$$dx^2 + dy^2 = g_{ss}ds^2 + g_{\nu\nu}d\nu^2,$$

где (x, y) — декартовы координаты, а компоненты $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора равны

$$g_{ss} \equiv g = (1 + \nu C(s))^2, \quad g_{\nu\nu} = 1.$$

Через $C(s)$ обозначена кривизна $\partial\Omega_{\pm}$. Якобиан перехода к локальным координатам (ν, s) дается формулой

$$\frac{D(x, y)}{D(\nu, s)} = 1 + \nu C(s) = g^{1/2}.$$

Замена переменных $(x, y) \to (\nu, s)$ является регулярной в любой точке Ω, если $d < |C(s)|^{-1}$ для всех $s \in \mathbf{R}$. Оператор Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ в координатах (ν, s) записывается, как обычно, в виде

$$\Delta = g^{-1/2}\partial_s g^{-1/2}\partial_s + g^{-1/2}\partial_\nu g^{1/2}\partial_\nu =$$
$$= (1 + \nu C(s))^{-1}(\partial_\nu (1 + \nu C(s))\partial_\nu + \partial_s (1 + \nu C(s))^{-1}\partial_s). \qquad (9.2)$$

Всюду ниже будем предполагать кривизну $C(s)$ малой, а именно, считаем выполненными условия

$$dk \ll 1 \ll kC^{-1}, \quad C = \max_s |C(s)|, \qquad (9.3)$$

где k — волновое число: $E = k^2$. В этих условиях оператор Лапласа можно аппроксимировать с точностью до $O(C)$ оператором

$$\Delta_{app} = \partial_s^2 + C(s)\partial_\nu + \partial_\nu^2 \qquad (9.4)$$

и перейти от (9.1) к рассмотрению приближенной краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta_{app}\Psi = E\Psi, \\ \partial_\nu\Psi|_{\nu=0} = \gamma(s)\Psi|_{\nu=0}, \\ \partial_\nu\Psi|_{\nu=d} = -\gamma(s)\Psi|_{\nu=d}. \end{cases} \qquad (9.5)$$

Последняя порождает оператор $-\Delta_{app}$, действующий в гильбертовом пространстве

$$\mathfrak{H} = L_2([0, d] \times \mathbf{R}, \quad \rho_s^2(\nu)\, d\nu ds),$$

где $\rho_s(\nu) = \exp\{\nu C(s)/2\}$. Оператор $-\Delta_{app}$ самосопряжен на области определения, задаваемой краевыми условиями (9.5), и может быть представлен в форме (1.6):

$$-\Delta_{app} = -\partial_s^2 \otimes I + \int_{-\infty}^{\infty} \oplus L(s)\, ds,$$

где реперный оператор $L(s)$ задается выражением

$$L(s) = -\partial_\xi^2 - C(s)\partial_\nu. \qquad (9.6)$$

С таким представлением ассоциировано гильбертово расслоение с одномерной базой $\mathbf{R}$ и гильбертовым слоем $\mathcal{F}_s = L_2([0, d], \rho_s^2(\nu)\, d\nu)$. Легко проверить, что реперные операторы $L(s)$ самосопряжены на области определения

$$\mathcal{D}(L(s)) = W_2^2([0, d], \rho_s^2(\nu)\, d\nu) \cap \{\psi : \partial_\nu\psi|_{\nu=0} = \gamma(s)\psi(0),$$
$$\partial_\nu\psi|_{\nu=d} = -\gamma(s)\psi(d)\}.$$

Самосопряженность операторов $L(s)$ гарантирует полноту и ортогональность системы $\{\varphi_n\}$ их собственных функций,

$$L(s)\,\varphi_n(s) = \varepsilon_n(s)\,\varphi_n(s), \tag{9.7}$$

что позволяет представить решение краевой задачи (9.5) в виде адиабатического разложения:

$$\Psi = \sum_n \overline{\chi_n(s)}\,\varphi_n(\nu, s), \tag{9.8}$$

где $\chi_n(s) = \langle \varphi_n, \Psi \rangle_{\mathcal{F}_s}$. Подставляя (9.8) в (9.5), получим эффективное уравнение стандартного вида

$$[-(\partial_s \otimes I + A)^2 + \Lambda(s)]\,\chi(s) = E\chi(s), \tag{9.9}$$

где $A_{mn}(s) = \langle \varphi_m, \partial_s \varphi_n \rangle$, $\Lambda(s) = \operatorname{diag}\{\varepsilon_n(s)\}$.

Реперная задача (9.7) в рассматриваемом случае допускает явное решение. Именно, заменой переменных

$$\psi(\nu, s) \equiv \rho_s(\nu)\,\varphi(\nu, s) \tag{9.10}$$

она трансформируется в краевую задачу

$$\begin{cases} -\partial_\nu^2 \psi_n(\nu, s) = k_n^2(s)\,\psi_n(\nu, s), \\ \partial_\nu \psi_n|_{\nu=0} = \gamma(s)\,\psi_n(0), \\ \partial_\nu \psi_n|_{\nu=d} = -\gamma(s)\,\psi_n(d), \end{cases} \tag{9.11}$$

где

$$k_n^2(s) = \varepsilon_n(s) - C^2(s)/4. \tag{9.12}$$

Замена переменных (9.10) порождает пересчет метрик:

$$L_2([0, d], \rho^2{}_s(\nu)\,d\nu) \to L_2([0, d], d\nu).$$

Следующие факты есть простое следствие штурм-лиувиллиевского характера задачи (9.11):

Собственные числа $k_n^2(s)$ задачи (9.11) совпадают с корнями уравнения

$$k_n^2(s) = 2k_n(s)\,\gamma(s)\,\operatorname{ctg}(dk_n(s)) + \gamma^2(s). \tag{9.13}$$

Спектр $L(s)$ чисто дискретный, пересечение термов отсутствует, а собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_n(\nu, s) = {} & (d(\gamma^2(s) + k_n^2(s))/2)^{-1/2}\,(\gamma(s)\sin(k_n(s)\,\nu) + \\ & + k_n(s)\cos(k_n(s)\,\nu)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{9.14}$$

Отметим, что для $\gamma(s) \in C^2(\mathbf{R})$ реперные функции $\varphi_n(\nu, s)$ дважды непрерывно дифференцируемы по параметру s, что оправдывает формальную схему метода адиабатических представлений.

Непосредственным вычислением для матричных элементов оператора связности получаем формулу

$$
\begin{aligned}
A_{nm}(s) = \langle \varphi_n, \partial_s \varphi_m \rangle = \frac{1}{2} N_n(s) N_m(s) \big((k_m - k_n)^{-1} \sin(d(k_m - k_n)) (\gamma(\partial_s \gamma - {} \\
- k_m \partial_s k_m) + \partial_s k_m k_n (\gamma + 1) + \gamma \partial_s C(s)) + {} \\
+ (k_m + k_n)^{-1} \sin(d(k_m + k_n)) (-\gamma(\partial_s \gamma - k_m \partial_s k_m) + \partial_s k_m k_m (\gamma + 1) - {} \\
- \gamma \partial_s C(s)) + (k_m - k_n)^{-1} (\cos(d(k_m - k_n)) - 1)(k_n (\partial_s \gamma - k_m \partial_s k_m) - {} \\
- \partial_s k_m \gamma(\gamma + 1)) + (k_m + k_n)^{-1} (\cos(d(k_m + k_n)) - 1)(-k_n(\partial_s \gamma - k_m \partial_s k_m) - {} \\
- \partial_s k_m \gamma(\gamma + 1)) - (\gamma^2 - k_m k_n) \partial_s C(s) ((k_m - k_n)^2 (\cos(d(k_m - k_n)) - 1) - {} \\
- (k_m + k_n)^{-2} (\cos(d(k_m + k_n)) - 1))\big),
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

в которой нормировочные коэффициенты $N_n(s)$ равны

$$N_n(s) = (d(\gamma^2(s) + k_n^2(s))/2)^{-1/2}. \tag{9.16}$$

Из формул (9.13)—(9.16) в частности следует, что

$$A_{nm}(s) = O(m^{-1}n^{-1}) \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Следовательно, для всех $s \in \mathbf{R}$ оператор $A(s)$ является оператором Гильберта— Шмидта в пространстве l_2^+.

Отметим, что хотя в рассмотренной выше простой модели отсутствует пересечение термов, в общей ситуации, например для волноводов с неоднородной внутренней средой, такое пересечение может иметь место. В этом случае унитарная эволюция репера определена лишь в тех областях $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{M} = \mathbf{R}$, где термы не пересекаются. Для описания связи между такими кусочно заданными операторами эволюции следует обработать информацию о локальном поведении связности $A(s)$ в окрестности точек пересечения термов и о самом характере этого пересечения. Такая информация может быть получена на основе методов спектральной теории операторов Штурма—Лиувилля [40]. Обозначим через $f(\nu, s, \lambda)$ решение задачи

$$
\begin{cases}
-(\partial_\nu^2 + C(s)\partial_\nu) f = \lambda f, \\
f(0, s, \lambda) = 1, \\
\partial_\nu f(\nu, s, \lambda)\big|_{\nu=0} = -\gamma(s)
\end{cases}
$$

и определим функцию

$$\Xi(s, \lambda) = \partial_\nu f(d, s, \lambda) + \gamma(s) f(d, s, \lambda).$$

Термы $\varepsilon_n(s)$ совпадают с корнями дисперсионного уравнения

$$\Xi(s, \varepsilon_n(s)) = 0,$$

а кратность выраждения уровня $\varepsilon_n(s)$ в точке $s = s_0$ совпадает с кратностью корня, т. е. равна m_0, если

$$\frac{d^m}{d\lambda^m} \Xi(s_0, \lambda)\bigg|_{\lambda = \varepsilon_n(s_0)} = 0$$

для всех $m \leqslant m_0$. Теорема Гельмана — Фейнмана [30] позволяет использовать эту информацию для исследования характера сингулярности калибровочного поля $A(s)$ в окрестности точки $s = s_0$.

§ 10. Квантовый волновод с потерями

В настоящем параграфе изучается задача, отличная от рассмотренных выше. Именно, мы рассматриваем квантовый волновод с импедансными граничными условиями на стенках и строим соответствующий оператор, позволяющий дать строгую математическую (операторную) трактовку задачи. В представлении (1.6) реперные операторы оказываются уже не самосопряженными, а диссипативными, что препятствует непосредственному применению метода адиабатических представлений. Мы однако показываем, что спектр таких операторов чисто дискретный, а их собственные функции образуют базис Рисса. Это позволяет воспользоваться методом адиабатических представлений и для исследования диссипативных волноводных задач.

Итак, рассмотрим квантовый волновод с импедансными граничными условиями:

$$\begin{cases} (-\partial_s^2-\partial_x^2)\, u(x, s, k) = k^2 u(x, s, k), \\ \partial_n u\,|_{\partial\Omega} = i\gamma(s)\, ku\,|_{\partial\Omega},\ \gamma(s)\in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{10.1}$$

Параметр $\gamma(s)$ для всех s считаем лежащим в пределах $-1<\gamma<0$, что не ограничивает общности рассмотрения. Условие $\gamma<0$ означает диссипацию (уход энергии через стенки).

Построим новую спектральную задачу и докажем ее эквивалентность (в указанном ниже смысле) исходной задаче (10.1). Для этого введем пространство $\mathscr{H} = L_2[-d, d] \oplus L_2[-d, d]$ двухкомпонентных функций

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) \end{pmatrix}$$

с энергетической метрикой

$$\langle\Psi, \Phi\rangle_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_{-d}^{d} (\Psi_0'\overline{\Phi_0'} + \Psi_1\overline{\Phi}_1)\, dx, \tag{10.2}$$

где штрих означает дифференцирование по x. Рассмотрим оператор

$$\mathscr{B}(s) = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

в пространстве $\mathscr{H}$ с областью определения

$$\mathscr{D}(\mathscr{B}(s)) = \{\Psi : \Psi_0\in W_2^2,\quad \Psi_1\in W_2^1,\quad \Psi_0'(\pm d) = \mp\beta(s)\,\Psi_1(\pm d)\}$$

с некоторой функцией $\beta(s)\in\mathbf{R}$. Ее связь с $\gamma(s)$ получена ниже. При $\beta(s)<0$ оператор $\mathscr{B}(s)$ диссипативен на $\mathscr{D}(\mathscr{B}(s))$.

Рассмотрим пространство

$$\mathfrak{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \otimes\, \mathscr{H}\, ds$$

и действующий в $\mathfrak{H}$ оператор

$$H = \hat{T}\otimes I_x + \int_{-\infty}^{\infty} \oplus\, \mathscr{B}(s)\, ds, \tag{10.4}$$

где оператор I_x действует как единичный по переменной x, а оператор $\hat{T}$ имеет вид:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ T_{10} & -T \end{pmatrix} \qquad (10.5)$$

с некоторыми операторами T, T_{10}. Получим для них явное представление. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что если выполнено соотношение

$$iT_{10} + T^2 = -\partial_s^2, \qquad (10.6)$$

то компонента Ψ_0 решения Ψ спектральной задачи

$$H\Psi = k\Psi \qquad (10.7)$$

удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases} (-\partial_x^2 - \partial_s^2)\,\Psi_0(x, s, k) = k^2\Psi_0(x, s, k), \\ \partial_x\psi_0\,|_{x=\pm d} = \pm\, i\beta(s)\,k\Psi_0\,|_{x=\pm d} \mp i\beta(s)\,(T\Psi_0)\,|_{x=\pm d}. \end{cases} \qquad (10.8)$$

Из сравнения задач (10.1) и (10.8) следует, что их решения совпадают, если на $\partial\Omega_\pm$ выполнено соотношение

$$\partial_n = \gamma(s)\,\beta^{-1}(s)\,(\partial_x \pm i\beta(s)\,T). \qquad (10.9)$$

Граница волновода $\partial\Omega$ задается уравнением

$$x(s) = \pm d + \tau(s)$$

(для простоты полагаем $|\tau(s)| \ll d$). В этом случае нормальная производная $\partial_n = (\nabla, \mathbf{n}) = n_x\partial_x + n_s\partial_s$ имеет вид

$$\partial_n = (1 + (\partial_s\tau)^2)^{-1/2}\,(\partial_x - \partial_s\tau\partial_s). \qquad (10.10)$$

Сравнивая (10.9) и (10.10), находим

$$\beta(s) = \gamma(s)\,(1 + (\partial_s\tau)^2)^{1/2}, \qquad (10.11)$$

$$T = i\alpha(s)\,\partial_s, \qquad (10.12)$$

где

$$\alpha(s) = -\gamma(s)^{-1}\,\partial_s\tau\,(1 + (\partial_s\tau)^2)^{-1/2}.$$

Из (10.12) следует, что

$$T^2 = -\alpha(s)\,[(\partial_s\alpha(s))\,\partial_s + \alpha(s)\,\partial_s^2],$$

откуда, с учетом (10.6), имеем

$$T_{10} = i\,(1 - \alpha^2(s))\,\partial_s^2 - i\alpha(s)\,(\partial_s\alpha(s))\,\partial_s. \qquad (10.13)$$

Таким образом, мы можем перейти от исходной краевой задачи (10.1) к спектральной задаче вида (1.12)

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha\partial_s & 0 \\ (1-\alpha^2)\,\partial_s^2 - \alpha\,(\partial_s\alpha)\,\partial_s & -\alpha\partial_s \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} \oplus\, \mathcal{B}(s)\,ds\right]\Psi = E\Psi \qquad (10.14)$$

с диссипативными реперными операторами $\mathcal{B}(s)$ и одномерной базой $\mathbf{R}$.

Реперная задача

$$\mathcal{B}(s)\,\Phi^{(n)}(x, s) = \varepsilon_n(s)\,\Phi^{(n)}(x, s) \qquad (10.15)$$

допускает явное решение. Спектр оператора $\mathcal{B}(s)$ чисто дискретный,

$$\varepsilon_n(s) = \varkappa_n + iq(s),$$

$$\varkappa_n = \frac{\pi n}{2d}, \quad q(s) = \frac{1}{2d} \ln \left| \frac{1-\beta(s)}{1+\beta(s)} \right|,$$

а его собственные функции

$$\Phi^{(n)}(x, s) = \begin{pmatrix} \Phi_0^{(n)} \\ -i\varepsilon_n \Phi_0^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_0^{(n)} = (2\varepsilon_n(s)\sqrt{d})^{-1} (e^{i\varkappa_n x} e^{-q(s)x} + (-1)^n e^{-i\varkappa_n x} e^{q(s)x})$$

образуют базис Рисса:

$$\sum_n \langle \cdot, \Phi^{(n)*} \rangle_\varepsilon \Phi^{(n)} = \sum_n \langle \cdot, \Phi^{(n)} \rangle_\varepsilon \Phi^{(n)*} = I_{\mathscr{H}}, \tag{10.16}$$

$$\langle \Phi^{(n)}, \Phi^{(m)*} \rangle_\varepsilon = \delta_{nm}. \tag{10.17}$$

В силу эквивалентности задачи (10.14) исходной краевой задаче (10.1), а также благодаря соотношениям (10.16), (10.17) для исследования диссипативной задачи (10.1) может быть применен метод адиабатических представлений в базисе $\{\Phi^{(n)}(x, s)\}$.

Список литературы

1. *Born M.*, *Oppenheimer R.* Zur Quanten Theorie der Molekulen // Ann. der Phys. 1927. Bd. 84. S. 457—484.
2. *Macek J.* Properties of autoionizing states of He // J. Phys. B. 1968. V. 1. P. 831—843.
3. *Виницкий С. И.*, *Пономарев Л. И.* Адиабатическое представление в задаче трех тел с кулоновским взаимодействием // ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. Вып. 6. С. 1336—1418.
4. *Браун П. А.*, *Киселев А. А.* Введение в теорию молекулярных спектров. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
5. *Киселев А. А.* О гамильтониане распадающихся молекул // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 64. Вып. 6. С. 1235—1252.
6. *Berry M. V.* Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // Proc. Roy. Soc. A. 1984. V. 392. P. 45—57.
7. *Simon B.* Holonomy, the quantum adiabatic theorem and Berry's phase // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2167—2170.
8. *Wilczek F.*, *Zee A.* Appearance of gauge structure in simple dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 2111—2114.
9. *Moody J.*, *Shapere A.*, *Wilczek F.* Realization of magneticmonopole gauge fields: diatoms and spin precision // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 833—896.
10. *Makarov K. A.*, *Kuperin Yu. A.*, *Pavlov B. S.*, *Dubovik V. M.*, *Markovski B. L.*, *Vinitsky S. I.* A local adiabatic representation in the few-body quantum scattering problem. Preprint FUB-HEP/87-11. Berlin(West): FUB, 1987.
11. *Виницкий С. И.*, *Кадомцев М. Б.*, *Сузько А. А.* Адиабатическое представление задачи трех тел в гиперсферических координатах. Амплитуда рассеяния. Препринт ОИЯИ. Р4-89-268. Дубна: ОИЯИ, 1989.
12. *Iwai T.* A geometric setting for internal motions of the quantum three-body systems // J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1315—1326.
13. *Anandan J.*, *Stodolsky L.* Some geometrical consideration on Berry's phase // Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 2597—2599.
14. *Zygelmann B.* Appearance of gauge potentials in atomic collision physics // Phys. Lett. A. 1987. V. 125. P. 476—481.
15. *Kuperin Yu. A.*, *Melnikov Yu. B.*, *Pavlov B. S.* Quantum scattering problem in triangle representation and induced gauge fields // Schrödinger operators, standard and non-standard; Proc. Intern'l Workshop. Dubna. Singapore: World Scientific, 1988. P. 295—319.
16. *Kuperin Yu. A.*, *Melnikov Yu. B.* Curved quantum waveguides; geometric setting for scattering problem // Topological phases in quantum theory (B. Markovski and S. I. Vinitsky, eds.): Proc. Intern'l Workshop. Dubna. Singapore: World Scientific, 1988. P. 146—172.
17. *Kurasov P. B.*, *Melnikov Yu. B.* Three-body scattering in one dimension: a geometric version of an adiabatic approach // Topological phases in quantum theory (B. Mar-

kovski and S. I. Vinitsky, eds.): Proc. Intern'l Workshop. Dubna. Singapore: World Scientific, 1988. P. 204—217.
18. *Kuperin Yu. A., Kurasov P. B., Mednikov Yu. B., Merkuriev S. P.* Connexions and effective S-matrix in triangle representation for quantum scattering. Preprint INFN-ISS 89/6. Roma: INFN, 1989.
19. *Kuperin Yu. A., Melnikov Yu. B., Motovilov A. K.* Three-body deuteron-nucleas scattering with extra resonance channels. Preprint INFN-ISS 89/5. Roma: INFN, 1989.
20. *Jackiw R.* Three elaborations on Berry's connection, curvature and phase // Intern. J. Mod. Phys. A. 1988. V. 3, № 2. P. 285—297.
21. *Markovski B. L., Vinitsky S. I., Dubovik V. M.* Berry phase for linear evolution systems // Topological phases in quantum theory (B. Markovski and S. I. Vinitsky, eds.): Proc. Intern'l Workshop. Dubna. Singapore: World Scientific, 1988. P. 93—111.
22. *Dodonov V. V., Man'ko V. I.* Adiabatic Invariants, Correlated States and Berry's Phase // Topological phases in quantum theory (B. Markovski and S. I. Vinitsky, eds.): Proc. Intern'l Workshop. Dubna. Singapore. World Scientific, 1988. P. 74—83.
23. *Herdegen A.* Geometric structure of quantum-mechanical evolution // Phys. Lett. A. 1989. V. 139. P. 109—111.
24. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
25. *Мищенко А. С.* Векторные расслоения и их применения. М.: Наука, 1984.
26. *Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987.
27. *Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
28. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. М.: Гостехиздат, 1957.
29. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
30. *Valk H. S.* Radial expectation values for central force problem and the Feynmann-Hellmann theorem // American J. of Phys. 1986. V. 10. P. 921—923.
31. *Feshbach H.* Unified theory of nuclear reactions I, II // Ann. Phys. (N. Y.). 1958. V. 5. P. 357—390. Ibid. 1962. V. 19. P. 287—313.
32. *Меркурьев С. П.* Координатная асимптотика волновых функций для системы трех частиц // ТМФ. 1971. Т. 8, № 2. С. 235—250.
33. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
34. *Меркурьев С. П.* Теория рассеяния для системы трех частиц в конфигурационном пространстве: Дисс. ... докт. физ.-матем. наук: Л.: ЛГУ, 1978, 334 с.
35. *McGuire J. B., Hurst C. A.* Three interacting particles in one dimension: an algebraic approach // J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 155—168.
36. *Буслаев В. С., Меркурьев С. П., Саликов С. П.* О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц // Пробл. мат. физики. 1979. Вып. 9. ЛГУ. С. 14—30.
37. *Kurasov P. B.* Three one-dimensional bosons with an internal structure // Schrödinger operators, standard and non-standard: Proc. Intern'l Workshop. Dubna. Singapore: World Scientific, 1988.
38. *Левин Л.* Теория волноводов. М.: Наука, 1981.
39. *Exner P., Šeba P.* Bound states in curved quantum waveguides. Preprint BiBoS Nr. 298/87. Bielefeld: BiBoS, 1987.
40. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наукова Думка, 1977.
41. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1984.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
17.05.1990